

Mc1 – Corrigé de l'exercice 2

□ Exercice 2

a) Pendant une durée dt , la distance parcourue dx est égale à la longueur de l'arc de cercle $a d\theta$ (portion de la roue ayant touché le sol). En divisant par dt on obtient $\boxed{v = a \dot{\theta}}$ (= cte).

b) On intègre : $\theta(t) = \frac{v}{a}t + A$ avec $\theta(0) = A = 0$, soit $\boxed{\theta(t) = \frac{v}{a}t}$.

c) $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$.

Dans $\mathcal{R}'$, M tourne autour du point fixe C à la vitesse angulaire constante $\dot{\theta}$: le mouvement de M dans $\mathcal{R}'$ est circulaire uniforme.

d) Loi de composition des vitesses : $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} + \vec{v}_e(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$.

Le référentiel $\mathcal{R}'$ étant en translation rectiligne dans $\mathcal{R}$: $\vec{v}_e(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{v}(C)_{\mathcal{R}} = v \vec{e}_x$.

D'autre part, pour M en mouvement circulaire uniforme dans $\mathcal{R}'$: $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} = a \dot{\theta} \vec{j} = v \vec{j}$.

Donc $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = v(\vec{e}_x + \vec{j}) = v(1 - \cos \theta) \vec{e}_x + v \sin \theta \vec{e}_z$ soit $\boxed{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = v \left(1 - \cos \frac{vt}{a} \right) \vec{e}_x + v \sin \frac{vt}{a} \vec{e}_z}$.

Loi de composition des accélérations : $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{\mathcal{R}'} + \vec{a}_e(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} + \vec{a}_c(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$.

Or $\vec{a}_c(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0}$ (translation) et $\vec{a}_e(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{a}(C)_{\mathcal{R}} = \vec{0}$ (mouvement de C rectiligne uniforme). Et l'accélération de M dans $\mathcal{R}'$ est dirigée vers le centre du cercle :

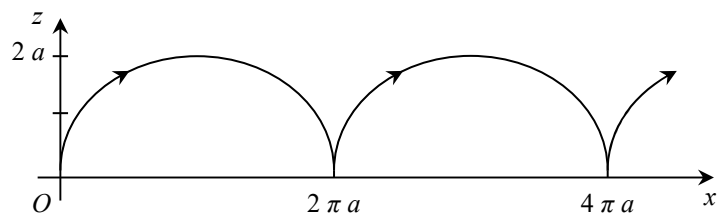
$\vec{a}(M)_{\mathcal{R}'} = -a \dot{\theta}^2 \vec{i} = -\frac{v^2}{a} \vec{i} = -\frac{v^2}{a} (-\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_z)$. Donc $\boxed{\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \frac{v^2}{a} \left(\sin \frac{vt}{a} \vec{e}_x + \cos \frac{vt}{a} \vec{e}_z \right)}$.

e) Projections de la vitesse : $\dot{x}(t) = v \left(1 - \cos \frac{vt}{a} \right)$ et $\dot{z}(t) = v \sin \frac{vt}{a}$. On intègre par rapport à t : $x(t) = v \left(t - \frac{a}{v} \sin \frac{vt}{a} \right) + B$ et

$z(t) = -v \frac{a}{v} \cos \frac{vt}{a} + C$. Et avec les conditions initiales $x(0) = z(0) = 0$: $\boxed{x(t) = vt - a \sin \frac{vt}{a}}$ et $\boxed{z(t) = a \left(1 - \cos \frac{vt}{a} \right)}$.

z oscille entre 0 et $2a$, tandis que x augmente toujours (puisque $\dot{x}(t) \geq 0$).

Lorsque $\frac{vt}{a} = 2k\pi$, $x(t) = 2k\pi a$, $z(t) = 0$ et $\dot{x}(t) = \dot{z}(t) = 0$.



f) Lorsque le caillou quitte la roue, sa vitesse initiale a une composante $\dot{x}(t) = v \left(1 - \cos \frac{vt}{a} \right)$ qui ne peut être que positive (ou nulle s'il est sur le sol). Il est ensuite en chute libre en gardant cette vitesse horizontale : le caillou ne peut partir que vers l'avant.