

Devoir d'entraînement de physique n° 3

Problème A

Viscosité : la formule de Stokes

En hydrodynamique, un fluide, qu'il soit gazeux ou liquide, est généralement représenté par un milieu continu associé à un champ de vitesse solution de l'équation de Navier-Stokes. Pour déterminer complètement ce champ au sein du fluide, il faut ajouter à cette équation des conditions aux limites. Par exemple, si le fluide est en contact avec un solide, la condition traduit le comportement du fluide sur la paroi de ce solide. La condition de non-glissement est généralement adoptée.

Dans ce problème, on se propose ~~tout d'abord dans la partie I~~, de retrouver l'expression de la loi de Stokes décrivant la force exercée par un écoulement sur un solide dans le régime de non-glissement avec un nombre de Reynolds faible.

Si on néglige la pesanteur, dans un fluide newtonien de masse volumique ρ , de pression P et de viscosité dynamique η , le champ de vitesse $\vec{v}$ est solution de l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right] = -\text{grad } P + \eta \Delta \vec{v} \quad (1)$$

On étudie l'écoulement incompressible d'un fluide de viscosité η , autour d'une boule de rayon a qui se déplace à vitesse constante $-\vec{v}_0 = -v_0 \vec{e}_z$ avec $v_0 > 0$ dans un référentiel galiléen. On ne prend pas en compte les effets du champ de pesanteur.

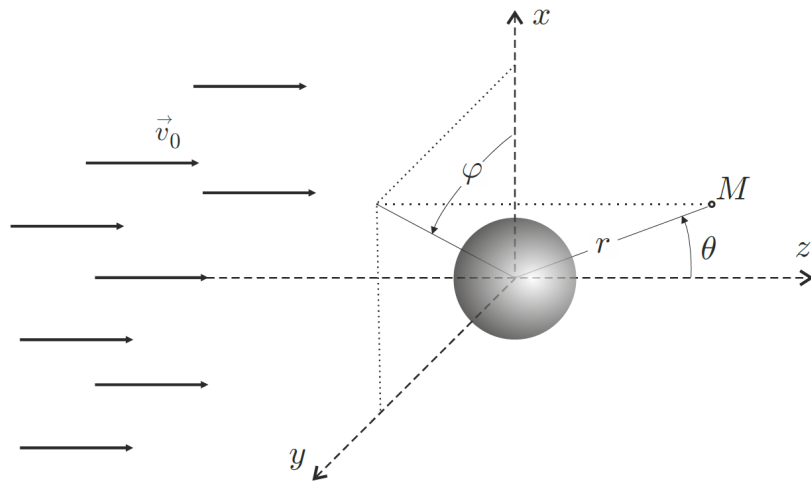


FIGURE 1 – Écoulement autour d'une boule et coordonnées sphériques.

On se propose d'obtenir l'expression de la force de Stokes résultant du mouvement relatif entre la boule et le fluide et dirigée dans le sens opposé à ce mouvement. On se place dorénavant dans le référentiel lié à la boule. L'écoulement du fluide est stationnaire et, loin de la boule, sa vitesse est $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_z$ et sa pression P_∞ . On note $\vec{v}$ la vitesse des particules de fluide autour de la boule. Pour un nombre de Reynolds très inférieur à 1 on parle de régime de Stokes : la force de trainée est celle de Stokes, pour une boule de rayon a elle s'écrit $\vec{F}_S = -6\pi \eta a \vec{v}$. Pour tout vecteur $\vec{A}$ on donne

$$\Delta \vec{A} = \text{grad} (\text{div} \vec{A}) - \text{rot} (\text{rot} \vec{A})$$

On rappelle que si un vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées (v_r, v_θ, v_ϕ) dans la base orthonormée sphérique $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ alors

$$\text{rot} \vec{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta v_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_\phi)}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\phi.$$

On donne enfin le gradient d'un scalaire $f(r, \theta, \phi)$ dans la base locale sphérique

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi.$$

- – 1. Donner la définition du nombre de Reynolds, $\mathcal{R}_e$, associé à un écoulement de vitesse typique v , de dimension typique L , de masse volumique ρ et de viscosité η .
Préciser le rapport de deux termes de l'équation de Navier-Stokes (1) qu'il estime.
Interpréter physiquement chacun de ces deux termes.
- – 2. En se plaçant dans le plan $\mathcal{P} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$, représenter qualitativement quelques lignes de courant du fluide autour de la boule pour les deux situations, $\mathcal{R}_e$ très grand (préciser) et $\mathcal{R}_e$ assez faible, et décrire dans chaque cas l'écoulement autour de la boule solide.
Pour $\mathcal{R}_e \ll 1$, on précisera sur le schéma le vecteur vitesse $\vec{v}(M)$ d'une particule de fluide localisée en un point $M \in \mathcal{P}$ voisin de la boule. Représenter aussi la distance r , l'angle θ et les vecteurs de base locaux $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ correspondants.
- – 3. Pour des nombres de Reynolds supérieur à 1000, comment la force de traînée subie par une boule solide est-elle reliée à la vitesse de l'écoulement ?

Pour évaluer la force de traînée, $\vec{F} = F_z \vec{e}_z$, subie par un solide se déplaçant à la vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_z$ dans un fluide au repos, on introduit le coefficient de traînée C_z défini par :

$$C_z = \frac{|F_z|}{\frac{1}{2} \rho v^2 S}$$

où S est la surface projetée du solide dans un plan perpendiculaire à la direction de son déplacement.

On considère dans le reste de cette partie un écoulement de Stokes stationnaire autour d'une boule de diamètre $d = 2a$.

- – 4. Déterminer l'expression du coefficient de traînée C_z en fonction du nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e$.
- – 5. Donner l'équation de Navier-Stokes simplifiée, correspondant au régime de l'écoulement considéré et vérifiée par le champ de vitesse du fluide $\vec{v}$ en un point M situé à l'extérieur de la boule.

On peut montrer (donc nous ne le ferons pas!) que pour un tel écoulement, la solution de l'équation précédente s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\vec{v}(r, \theta) = v_0 \cos \theta \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) \vec{e}_r - v_0 \sin \theta \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) \vec{e}_\theta$$

- – 6. Montrer que ce champ de vitesse vérifie bien la condition de non-glissement à la surface de la boule.
Montrer qu'il vérifie également la condition aux limites loin de la boule.
- – 7. Montrer que $\text{rot} \vec{v} = -\alpha \frac{v_0 a \sin \theta}{r^2} \vec{e}_\phi$ expression dans laquelle on précisera la valeur de la constante positive $\alpha \in \mathbb{Q}$.

□ – 8. En déduire que la pression autour de la boule s'écrit sous la forme $P(M) = P_\infty - \beta \frac{\cos \theta}{r^2}$ dans laquelle on précisera l'expression de β en fonction de η , a et v_0 .

□ – 9. Déterminer la résultante des forces de pression, notée $\vec{F}_p$, sur la boule.

On rappelle l'expression, en coordonnées sphériques, de la force élémentaire de cisaillement exercée par le fluide de viscosité η sur un élément de surface d'aire dS d'une boule de rayon a

$$d\vec{F}_c = \eta \frac{\partial(\vec{v} \cdot \vec{e}_\theta)}{\partial r} \Big|_{r=a} dS \vec{e}_\theta$$

□ – 10. Déterminer la résultante des forces de cisaillement, notée $\vec{F}_c$, exercée par le fluide sur toute la boule.

□ – 11. Déduire des deux résultats précédents la force de traînée exercée par le fluide sur la boule.

Problème B

Microscope optique

Un microscope optique porte les indications suivantes : sur son objectif : $\times 40$; sur son oculaire : $\times 10$. La notice constructeur précise : intervalle optique $\Delta = 16$ cm. La signification de ces indications sera précisée dans la suite (à lire avec attention !).

Le microscope sera modélisé par deux lentilles minces convergentes, l'objectif (de diamètre $d = 7,0$ mm) et l'oculaire. Il est réglé pour donner une image à l'infini d'un objet réel AB , perpendiculaire à l'axe optique, A étant placé sur l'axe, légèrement en avant du foyer objet de l'objectif. Cette image est observée par un œil emmétrope placé au voisinage du foyer image F'_2 de l'oculaire.

L'œil nu voit nettement des objets situés entre la distance $\delta = 25$ cm et l'infini.

1. Faire un schéma du dispositif (sans respecter l'échelle) et tracer soigneusement la marche de deux rayons lumineux issus du point B de l'objet AB , l'un émis parallèlement à l'axe optique, l'autre passant par F_1 (foyer objet de la lentille L_1 équivalente à l'objectif, de centre optique O_1).

2. L'indication portée sur l'oculaire ($\times 10$) est son *grossissement commercial*, c'est-à-dire le rapport de l'angle sous lequel on voit l'image à l'infini d'un objet à travers l'oculaire seul et de l'angle sous lequel on voit ce même objet à l'œil nu lorsqu'il est situé à la distance minimale de vision distincte ; on notera ce grossissement $G_2 = 10$. Déterminer f'_2 , distance focale image de l'oculaire.

3. L'intervalle optique correspond à la distance $F'_1 F_2$. La valeur absolue du *grandissement* de l'objet AB par l'objectif est : $|\gamma_1| = 40$ (c'est l'indication $\times 40$). Calculer f'_1 , distance focale image de la lentille équivalente à l'objectif. Calculer la distance $O_1 A$ permettant de positionner l'objet.

4. Calculer, dans le cas d'une image finale à l'infini, le grossissement commercial G du microscope.

5. On appelle cercle oculaire l'image de la monture de l'objectif à travers l'oculaire. Déterminer sa position par rapport à F'_2 et son diamètre. Quel est l'intérêt de placer l'œil dans le plan du cercle oculaire ? Commenter la valeur trouvée pour son diamètre.