

Exercices du chapitre Mc3

Ordres de grandeur en mécanique des fluides

1. Nombre de Reynolds et force de traînée

Évaluer le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement de l'air (masse volumique $\rho = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, viscosité dynamique $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$) autour des corps sphériques suivants, et en déduire l'expression adéquate de la force de traînée :

- balle de ping-pong, de diamètre $D = 40 \text{ mm}$, lancée à $V = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$;
- ballon de basketball, de diamètre $D = 23,9 \text{ cm}$, lancé à $V = 9,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- goutte de brouillard de diamètre $D = 20 \mu\text{m}$, tombant à $V = 1,0 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. Nombre de Mach et écoulement incompressible

Le nombre de Mach d'un écoulement est défini par : $Ma = \frac{V}{c}$

où V est l'ordre de grandeur de la vitesse de l'écoulement et c la célérité du son dans le fluide. Le fait qu'un écoulement de gaz puisse être considéré comme incompressible est lié à l'ordre de grandeur de Ma .

On note ρ la masse volumique du fluide, μ l'ordre de grandeur de la variation de cette masse volumique dans l'écoulement, P la pression, p l'ordre de grandeur de la variation de la pression dans l'écoulement, L une longueur caractéristique de l'écoulement, τ une durée caractéristique de l'écoulement.

- Énoncer l'équation locale de conservation de la masse, et en déduire qu'un écoulement incompressible vérifie $\text{div} \vec{v} = 0$.

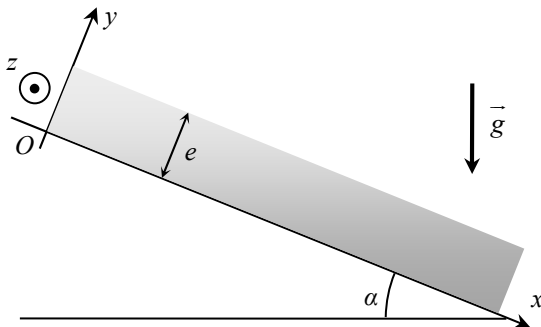
En pratique, on pourra considérer qu'un écoulement est incompressible si $\|\text{div} \vec{v}\| \ll \frac{V}{L}$.

- Déduire de cette condition une relation en ordres de grandeur entre μ , τ , ρ , V et L .
- Écrire l'équation de Navier-Stokes pour un écoulement parfait stationnaire, en négligeant l'effet du poids (très faible dans un gaz). En déduire une relation en ordres de grandeur entre ρ , V et p .
- On montre en physique des ondes (voir chapitre On2) que $p \sim \mu c^2$. En déduire finalement qu'un écoulement de gaz peut être considéré comme incompressible lorsque $Ma^2 \ll 1$.

Équations de la dynamique

3. Écoulement visqueux sur un plan incliné

Un liquide incompressible, de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ , s'écoule sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, sur une épaisseur e (entre $y = 0$ et $y = e$) et sur une largeur l (entre $z = 0$ et $z = l$).



L'écoulement est stationnaire, avec un champ de vitesse $\vec{v} = v_x(y) \vec{e}_x$. On néglige les forces de viscosité à l'interface entre le liquide et l'air. La pression dans l'air est P_0 .

- Déterminer la pression en tout point du liquide, en fonction de ρ , g , α , e , P_0 et y .

- Déterminer le champ de vitesse en fonction de ρ , g , η , α , e et y . Représenter graphiquement le profil de vitesse.
- Calculer le débit massique D_m .

4. Champ de pression dans un vortex de Rankine

On étudie un tourbillon d'eau stationnaire, à symétrie de révolution autour de l'axe vertical (Oz). L'altitude $z = 0$ correspond à la surface libre de l'eau à grande distance de l'axe du tourbillon. L'eau a une masse volumique uniforme ρ et sa viscosité est négligée (écoulement parfait). Son champ de vitesse a la forme suivante en coordonnées cylindriques :

$$\text{pour } r < a, \vec{v} = r\omega \vec{e}_\theta ; \quad \text{pour } r > a, \vec{v} = \frac{a^2\omega}{r} \vec{e}_\theta$$

où a et ω sont des constantes.

On note P_0 la pression atmosphérique et $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ le champ de pesanteur.

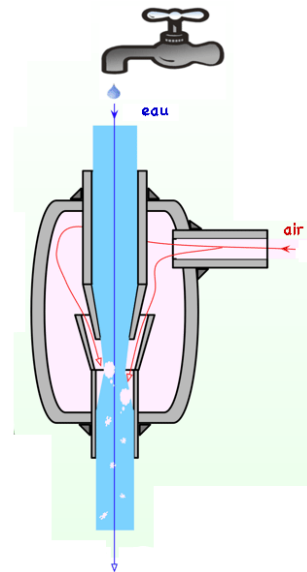
- Calculer le vecteur tourbillon dans chacune des deux régions ($r < a$ et $r > a$).

$$\text{On donne : } \vec{\text{rot}}(f(r)\vec{e}_\theta) = \frac{1}{r} \frac{d(rf(r))}{dr} \vec{e}_z.$$

- Déterminer le champ de pression dans l'eau.
- Déterminer l'équation de la surface libre, et la représenter sur un schéma en coupe verticale.

5. Effet Venturi et trompe à eau

L'effet Venturi est utilisé par exemple pour réaliser une trompe à eau (mise à profit en chimie pour la filtration sur Büchner).

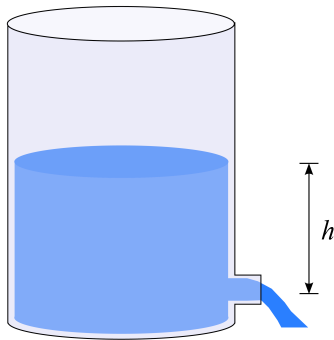


On suppose l'écoulement parfait, homogène, incompressible et stationnaire dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen.

- Préciser le sens physique de chacun des termes utilisés dans la phrase précédente.
- À l'aide d'une équation de conservation de la matière, établir une relation entre la vitesse en un point A à la sortie du robinet (dans le tube de rayon R_A) et la vitesse en un point B dans la zone de rétrécissement (de rayon $R_B < R_A$).
- À l'aide d'une équation d'évolution, en déduire la dépression $P_B - P_A$ en fonction de la vitesse v_A , des rayons des tuyaux et de la masse volumique ρ de l'eau.
- La dépression est limitée par la pression de vapeur saturante de l'eau à température ambiante (20°C), $\Pi = 2500 \text{ Pa}$. Que se passe-t-il si $P_B < \Pi$?
- Calculer alors la vitesse maximale et le débit maximal du robinet. Pour l'application numérique on prendra $R_A = 1 \text{ cm}$, $R_B = 0,2 \text{ cm}$ et les valeurs habituelles des autres données.

6. Force subie par un réservoir

Un réservoir d'eau de section S est muni d'une petite ouverture de vidange de section $s \ll S$. L'eau est assimilée à un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ .



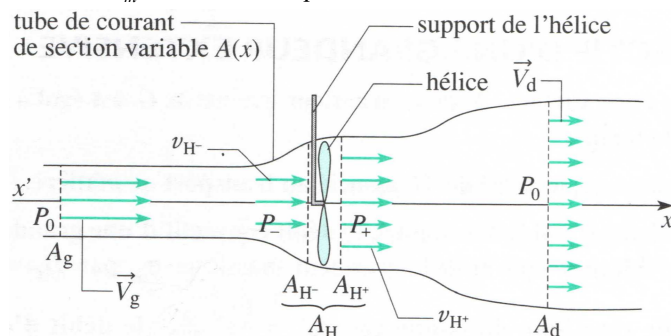
- a) L'écoulement étant supposé quasi stationnaire, montrer que la vitesse de sortie de l'eau est $v = \sqrt{2gh}$.
- b) Déterminer la force exercée par l'eau sur le réservoir.

7. Puissance reçue par une éolienne

Une hélice d'éolienne tourne autour de l'axe fixe horizontal (Ox) . Elle est traversée par un écoulement d'air supposé incompressible (la masse volumique de l'air est notée ρ).

Loin de l'hélice, l'air a une vitesse constante et uniforme $\vec{V}_g = v_g \vec{e}_x$ en amont, et une vitesse constante et uniforme $\vec{V}_d = v_d \vec{e}_x$ en aval. Le tube de courant qui englobe l'hélice a une section droite d'aire variable $A(x)$: à grande distance, elle vaut A_g en amont et A_d en aval.

On note D_m le débit massique de l'air à travers l'éolienne.



La pression de l'air vaut P_0 à l'extérieur du tube de courant, et également sur les sections d'aires A_g et A_d .

L'écoulement est supposé parfait, et les tourbillons sont localisés uniquement au voisinage de l'hélice, entre les deux sections notées A_{H-} et A_{H+} , de même aire A_H . Sur ces deux sections, les pressions sont notées P_- et P_+ et les vitesses v_{H-} et v_{H+} respectivement.

- a) Montrer que $v_{H-} = v_{H+}$ (que l'on notera v_H), et déterminer les relations entre les sections et les vitesses.
- b) Appliquer la relation de Bernoulli entre les sections A_g et A_{H-} , puis entre A_{H+} et A_d , et en déduire une relation entre P_- , P_+ , v_g , v_d et ρ . Pourquoi ne peut-on pas appliquer cette relation entre A_{H-} et A_{H+} ?

c) Exprimer de deux façons différentes la force $\vec{F} = F \vec{e}_x$ exercée par l'air sur l'hélice :

- d'une part en faisant un bilan sur la surface de contrôle délimitée par les sections A_{H-} et A_{H+} ;
- d'autre part en faisant un bilan sur la surface de contrôle délimitée par les sections A_g et A_d .

En déduire v_H en fonction de v_g et v_d , puis F en fonction de ρ , A_H , v_g et v_H .

d) Déterminer la puissance $\mathcal{P}$ cédée par le fluide à l'hélice.

e) On pose $v_H = v_g u$ où u est un paramètre sans dimension.

Déterminer, pour A_H et v_g données, la valeur de u qui rend $\mathcal{P}$ maximale, et exprimer alors F et $\mathcal{P}_{\max}$ (formule de Betz) en fonction de ρ , v_g et A_H .

f) On suppose que l'on a construit une hélice maximisant la puissance, avec les paramètres suivants : $A_H = 2000 \text{ m}^2$, $v_g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\rho = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Calculer F et $\mathcal{P}_{\max}$.

☞ Réponses partielles

2. b) $\frac{\mu}{\tau} \ll \rho \frac{V}{L}$.

3. a) $P = P_0 - \rho g \cos \alpha (y - e)$. c) $D_m = \frac{\rho^2 g l e^3 \sin \alpha}{3\eta}$.

4. b) Pour $r > a$: $P(r, z) = P_0 - \rho g z - \rho \omega^2 \frac{a^4}{2r^2}$.

7. a) $A_g v_g = A_H v_H = A_d v_d$. c) $v_H = \frac{v_g + v_d}{2}$, $F = 2\rho A_H (v_g - v_H) v_H$.