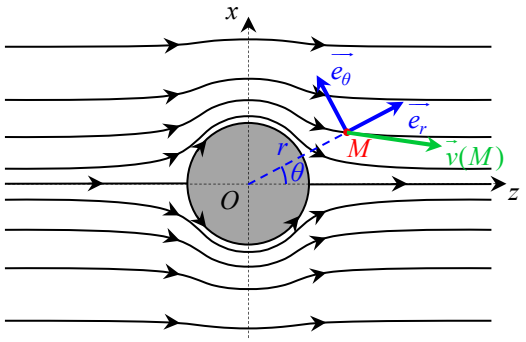
Corrigé du devoir d'entraînement de physique n° 3

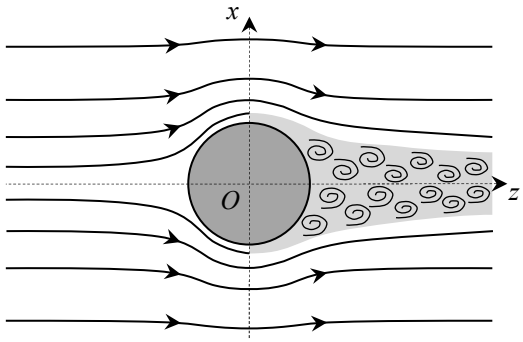
¤ **Problème A** (Mines-Ponts PC 2025)

1. Le nombre de Reynolds est par définition : $\boxed{\mathcal{R}_e = \dfrac{\rho L v}{\eta}}$. Il s'agit du rapport, en ordre de grandeur, $\boxed{\mathcal{R}_e \sim \dfrac{\left\|\rho\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right\|}{\left\|\eta\,\Delta\vec{v}\right\|}}$ entre le terme de convection de quantité de mouvement $\rho\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}$ (lié au fait que l'écoulement n'est pas uniforme) et le terme de diffusion de quantité de mouvement $\eta\,\Delta\vec{v}$ (équivalent volumique des forces de viscosité).

2. Lignes de courant pour $\mathcal{R}_e \ll 1$: écoulement laminaire, lignes de courants régulières et symétriques



Lignes de courant pour $\mathcal{R}_e \gg 1$: écoulement turbulent, nombreux tourbillons aléatoires derrière la boule



3. Pour des nombres de Reynolds supérieurs à 1000, la force de traînée est proportionnelle au carré de la vitesse.

4. Pour un écoulement de Stokes : $C_z = \dfrac{F_S}{\frac{1}{2}\rho v^2 S} = \dfrac{6\pi\eta a v}{\frac{1}{2}\rho v^2 \pi a^2} = \dfrac{12\eta}{\rho v a} = \dfrac{24\eta}{\rho v d}$ soit $\boxed{C_z = \dfrac{24}{\mathcal{R}_e}}$.

5. L'écoulement de Stokes correspond à un faible nombre de Reynolds, on peut alors négliger le terme convectif dans l'équation de Navier–Stokes. De plus l'écoulement est supposé stationnaire. Le premier membre est donc nul et il reste : $\boxed{\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \eta\,\Delta\vec{v}}$.

6. À la surface de la boule, $r = a$ donc les deux parenthèses sont nulles d'où $\boxed{\vec{v}(a,\theta) = \vec{0}}$: le fluide ne glisse pas sur la boule.

Par ailleurs, loin de la boule c'est-à-dire pour $r \to \infty$, $\vec{v}(\infty,\theta) = v_0\cos\theta\,\vec{e_r} - v_0\sin\theta\,\vec{e_\theta}$ soit $\boxed{\vec{v}(\infty,\theta) = v_0\vec{e_z}}$: on retrouve bien le champ de vitesse uniforme de l'écoulement non perturbé par la boule.

7. $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = 0\vec{e_r} + 0\vec{e_\theta} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_\varphi} = \dfrac{1}{r}\left(-v_0\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r - \dfrac{3a}{4} - \dfrac{a^3}{4r^2}\right) - v_0\left(1 - \dfrac{3a}{2r} + \dfrac{a^3}{2r^3}\right)\dfrac{\partial(\cos\theta)}{\partial\theta}\right)\vec{e_\varphi}$

$= \dfrac{1}{r}\left(-v_0\sin\theta\left(1 + 0 + \dfrac{a^3}{2r^3}\right) + v_0\left(1 - \dfrac{3a}{2r} + \dfrac{a^3}{2r^3}\right)\sin\theta\right)\vec{e_\varphi}$ soit $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = -v_0\sin\theta\dfrac{3a}{2r^2}\vec{e_\varphi}}$, qui est bien la formule cherchée avec $\boxed{\alpha = \dfrac{3}{2}}$.

8. $\overrightarrow{\text{grad}}\,P = \eta\,\Delta\vec{v} = \eta\,\overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\vec{v}\right) - \eta\,\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right)$. Or $\text{div}\vec{v} = 0$ puisque l'écoulement est incompressible, il reste donc :

$\overrightarrow{\text{grad}}\,P = -\eta\,\overrightarrow{\text{rot}}\left(-v_0\sin\theta\dfrac{3a}{2r^2}\vec{e_\varphi}\right) = \eta v_0\dfrac{3a}{2}\left[\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\sin\theta}{r^2}\right)\vec{e_r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\sin\theta}{r^2}\right)\vec{e_\theta}\right] = \eta v_0\dfrac{3a}{2}\left[\dfrac{2\cos\theta}{r^3}\vec{e_r} + \dfrac{\sin\theta}{r^3}\vec{e_\theta}\right]$.

Projections : $\dfrac{\partial P}{\partial r} = 3a\eta v_0\dfrac{\cos\theta}{r^3}$ (1) ; $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial\theta} = \eta v_0\dfrac{3a}{2}\dfrac{\sin\theta}{r^3}$ (2) et $\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial P}{\partial\varphi} = 0$ (3). D'après (3), P ne dépend pas de φ. On intègre (1) par rapport à r : $P(r,\theta) = -\dfrac{3}{2}a\eta v_0\dfrac{\cos\theta}{r^2} + A(\theta)$. On injecte ceci dans (2) : $\dfrac{3}{2}a\eta v_0\dfrac{\sin\theta}{r^3} + \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta} = \eta v_0\dfrac{3a}{2}\dfrac{\sin\theta}{r^3}$ soit $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta} = 0$ donc $A = \text{cte}$, soit $P(r,\theta) = -\dfrac{3a\eta v_0\cos\theta}{2r^2} + A$. Limite quand $r \to \infty$: $P(\infty,\theta) = A = P_\infty$. Finalement $\boxed{P(r,\theta) = -\dfrac{3a\eta v_0\cos\theta}{2r^2} + P_\infty}$, qui est bien la formule cherchée avec $\boxed{\beta = \dfrac{3a\eta v_0}{2}}$.

9. $\vec{F_p} = \iint_\Sigma P(M)\,\vec{n_{\text{int}}}\,\mathrm{d}s = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(P_\infty - \dfrac{3a\eta v_0\cos\theta}{2a^2}\right)\cdot\left(-\vec{e_r}\right)a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = -2\pi a^2\int_{\theta=0}^{\pi}\left(P_\infty - \dfrac{3\eta v_0\cos\theta}{2a}\right)\cdot\vec{e_r}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$.

Le calcul complet de l'intégrale est faisable mais affreux, car il faut projeter $\vec{e_r}$ sur trois axes, mais on peut le simplifier par symétrie. Tout d'abord, l'intégrale du terme $P_\infty\vec{e_r}$ est nulle, car ces vecteurs s'annulent deux à deux entre les points opposés de la sphère. Il n'en va pas de même pour le terme en $\cos\theta\,\vec{e_r}$; cependant le problème étant invariant par rotation autour de (Oz), puisque rien ne dépend de φ, l'intégrale est forcément portée par $\vec{e_z}$. On projette alors $\vec{e_r}$ sur $\vec{e_z}$ grâce à notre schéma, ce qui donne $\cos\theta\,\vec{e_z}$. Alors l'intégrale devient : $\vec{F_p} = 2\pi\dfrac{3a\eta v_0}{2}\int_{\theta=0}^{\pi}\cos^2\theta\,\vec{e_z}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 3\pi a\eta v_0\vec{e_z}\left[-\dfrac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi$ soit $\boxed{\vec{F_p} = 2\pi a\eta v_0\vec{e_z}}$.

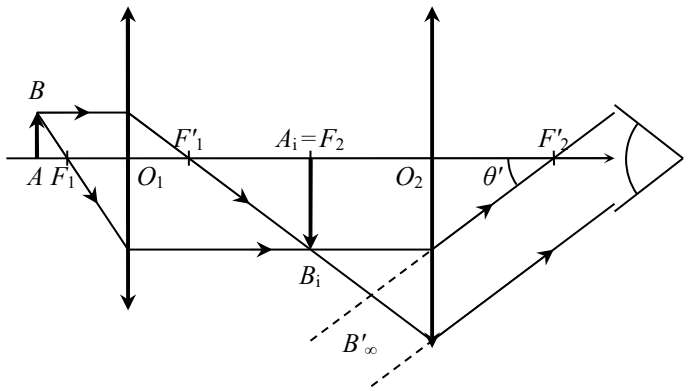
10. $\vec{F_c} = \iint_\Sigma \eta\left.\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}\right|_{r=a}\vec{e_\theta}\,\mathrm{d}s = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}(-\eta v_0\sin\theta)\left(\dfrac{3a}{4a^2} + \dfrac{3a^3}{4a^4}\right)\cdot\vec{e_\theta}\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = -2\pi\eta v_0\dfrac{3}{2}\int_{\theta=0}^{\pi}\vec{e_\theta}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta$. Comme précédemment, on projette $\vec{e_\theta}$ sur $\vec{e_z}$, ce qui donne $-\sin\theta\,\vec{e_z}$.

Alors $\overrightarrow{F_c} = +3\pi\eta v_0 \overrightarrow{e_z} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = 3\pi\eta v_0 \overrightarrow{e_z} \int_{\theta=0}^{\pi} (1-\cos^2\theta)\sin\theta \, d\theta = 3\pi\eta v_0 \overrightarrow{e_z} \left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta \right]_0^{\pi}$ soit $\boxed{\overrightarrow{F_c} = 4\pi a \eta v_0 \overrightarrow{e_z}}$.

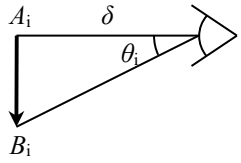
11. $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_p} + \overrightarrow{F_c}$ soit $\boxed{\overrightarrow{F} = 6\pi a \eta v_0 \overrightarrow{e_z}}$. On obtient bien la formule de Stokes. La force de traînée sur une boule est donc constituée d'un tiers de forces de pression et de deux tiers de forces de viscosité.

¤ **Problème B** (Centrale-Supélec PC 2000)

1.



2. L'objet pour l'oculaire est A_iB_i. Le grossissement commercial G_2 est donc $\frac{\theta'}{\theta_i}$ avec l'angle θ' indiqué sur la figure ci-contre, et θ_i l'angle sous lequel serait vu A_iB_i à l'œil nu à la distance δ (figure ci-dessous).
Dans les conditions de Gauss :



$\theta' \approx \tan\theta' = \frac{A_iB_i}{f_2'}$, $\theta_i \approx \tan\theta_i = \frac{A_iB_i}{\delta}$

donc $G_2 = \frac{\delta}{f_2'}$ d'où $\boxed{f_2' = \frac{\delta}{G_2}}$.

AN $\boxed{f_2' = 2{,}5\,\text{cm}}$.

3. Formule de grandissement de Newton (théorème de Thalès) : $\gamma_1 = \frac{\overline{A_iB_i}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F_1'F_2}}{\overline{F_1'O_1}} = \frac{\Delta}{-f_1'}$. Donc $|\gamma_1| = \frac{\Delta}{f_1'}$ d'où $\boxed{f_1' = \frac{\Delta}{|\gamma_1|}}$. *(Ce n'est pas du tout le même calcul que pour l'oculaire !)* AN $\boxed{f_1' = 0{,}40\,\text{cm}}$.

De plus $\gamma_1 = \frac{\overline{O_1A_i}}{\overline{O_1A}} = \frac{f_1'+\Delta}{\overline{O_1A}}$ donc $\overline{O_1A} = \frac{f_1'+\Delta}{\gamma_1} (< 0)$ soit $\boxed{O_1A = \frac{f_1'+\Delta}{|\gamma_1|} = \frac{f_1'(f_1'+\Delta)}{\Delta}}$. AN $\boxed{O_1A = 0{,}41\,\text{cm}}$.

4. Grossissement global : $G = \frac{\theta'}{\theta}$ avec $\theta \approx \tan\theta = \frac{AB}{\delta}$ (objet AB vu à l'œil nu), donc $G = \frac{A_iB_i}{f_2'}\frac{\delta}{AB}$ soit $\boxed{G = |\gamma_1| G_2}$. AN $\boxed{G = 400}$.

5. Notons $O_1 \xrightarrow{L_2} C$. Formule de Newton : $\overline{F_2O_1} \cdot \overline{F_2'C} = -f_2'^2$ avec $\overline{F_2O_1} = -\Delta - f_1'$ donc $\boxed{\overline{F_2'C} = \frac{f_2'^2}{\Delta + f_1'}}$. AN $\boxed{\overline{F_2'C} = 3{,}8\,\text{mm}}$.

Le rapport des diamètres est la valeur absolue du grandissement : $\frac{d_{co}}{d} = \frac{F_2'C}{f_2'}$ d'où $\boxed{d_{co} = d\frac{f_2'}{\Delta + f_1'}}$. AN $\boxed{d_{co} = 1{,}1\,\text{mm}}$.

Tous les rayons ayant traversé l'objectif passent ensuite à l'intérieur du cercle oculaire (son image) : pour voir une image bien lumineuse et complète (pas de perte des bords) on a donc intérêt à placer l'œil à cet endroit. [On remarque d'ailleurs que le cercle oculaire se trouve juste derrière le foyer image de l'oculaire, ce qui correspond à la position de l'œil indiquée dans l'énoncé.]
Le diamètre du cercle oculaire est légèrement inférieur à celui de la pupille de l'œil, ce qui permet bien de capter toute la lumière issue du microscope.