Mc3 – Corrigé des exercices 2, 3, 5, 7

¤ Exercice 2

a) Équation locale de conservation de la masse, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \vec{v}\right) = 0$ ou encore $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$. Un écoulement incompressible est défini par $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0$, d'où $\boxed{\operatorname{div} \vec{v} = 0}$.

b) $\left\|\operatorname{div} \vec{v}\right\| \ll \frac{V}{L}$ équivaut à $\frac{1}{\rho}\left|\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\right| \ll \frac{V}{L}$ Or $\left|\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\right| \sim \frac{\mu}{\tau}$ donc on obtient $\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\mu}{\tau} \ll \frac{V}{L}}$.

c) L'équation de Navier–Stokes $\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\right)\vec{v}\right) = \rho\vec{g} - \overrightarrow{\operatorname{grad}} P + \eta\Delta\vec{v}$ devient $\boxed{\rho\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\right)\vec{v} \approx -\overrightarrow{\operatorname{grad}} P}$ pour un écoulement parfait stationnaire où on néglige le poids. Donc $\frac{\rho V^2}{L} \sim \frac{p}{L}$ soit $\boxed{\rho V^2 \sim p}$.

d) Cette équation devient $\rho V^2 \sim \mu c^2$ soit $\frac{\mu}{\rho} \sim \frac{V^2}{c^2} = Ma^2$. Donc la condition $\frac{1}{\rho}\frac{\mu}{\tau} \ll \frac{V}{L}$ est équivalente à $\frac{Ma^2}{\tau} \ll \frac{V}{L}$. Enfin $V \sim \frac{L}{\tau}$ donc on trouve finalement $\boxed{Ma^2 \ll 1}$. Par exemple pour $V = 120\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = 33\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $Ma = 0{,}1$ donc $Ma^2 = 0{,}01 \ll 1$.

¤ Exercice 3

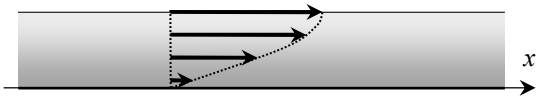
a) Équation de Navier–Stokes : $\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\right)\vec{v} = \rho\vec{g} - \overrightarrow{\operatorname{grad}} P + \eta\Delta\vec{v}$. On détaille chaque terme : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ (écoulement stationnaire) ; $\rho\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\right)\vec{v} = \rho\left(v_x(y)\frac{\partial}{\partial x}\right)v_x(y)\vec{e_x} = \vec{0}$; $\rho\vec{g} = \rho g\sin\alpha\,\vec{e_x} - \rho g\cos\alpha\,\vec{e_y}$; $\overrightarrow{\operatorname{grad}} P = \frac{\partial P}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{e_z}$; $\eta\Delta\vec{v} = \eta\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}y^2}\vec{e_x}$.

On peut alors projeter l'équation sur les trois vecteurs de base : $\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g\sin\alpha + \eta\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}y^2}$ (1) ; $\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g\cos\alpha$ (2) ; $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$ (3).

D'après (3), P est indépendante de z, on cherche donc $P(x,y)$. On intègre (2) par rapport à y : $P(x,y) = -\rho g\cos\alpha\, y + A(x)$. Condition aux limites : $P(x,e) = P_0, \forall x$, soit $-\rho g\cos\alpha\, e + A(x) = P_0$ d'où $A(x) = P_0 + \rho g\cos\alpha\, e$ (finalement indépendant de x), donc $\boxed{P = P_0 - \rho g\cos\alpha(y-e)}$.

b) L'équation (1) s'écrit finalement : $\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}y^2} = -\frac{\rho g\sin\alpha}{\eta}$. On intègre : $\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y} = -\frac{\rho g\sin\alpha}{\eta}y + B$ puis $v_x(y) = -\frac{\rho g\sin\alpha}{2\eta}y^2 + By + C$.

Première condition aux limites : $v_x(0) = 0$ car la vitesse d'un fluide visqueux au contact d'une paroi solide est égale à celle de cette paroi, donc nulle ici ; on en déduit $C = 0$. Deuxième CL : la contrainte tangentielle de viscosité $\eta\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}$ est nulle en $y = e$ (force de viscosité de l'air négligée), donc $-\frac{\rho g\sin\alpha}{\eta}e + B = 0$ d'où $B = \frac{\rho g\sin\alpha}{\eta}e$. Finalement : $\boxed{\vec{v}(y) = \frac{\rho g\sin\alpha}{2\eta}(2ey - y^2)\vec{e_x}}$.



Le profil de vitesse est <u>parabolique</u>, avec le maximum à la surface et le minimum nul sur le plan incliné.

c) $D_m = \iint_\Sigma \rho\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \int_{y=0}^{e}\int_{z=0}^{l}\rho\frac{\rho g\sin\alpha}{2\eta}(2ey-y^2)\vec{e_x}\cdot\vec{e_x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\rho^2 g\sin\alpha}{2\eta}l\left[ey^2 - \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{e}$ soit $\boxed{D_m = \frac{\rho^2 g l e^3\sin\alpha}{3\eta}}$.

¤ Exercice 5

a) Voir cours.

b) L'écoulement étant incompressible et stationnaire, les débits volumique et massique sont conservés entre l'entrée et la sortie : $\boxed{\pi R_A^2 v_A = \pi R_B^2 v_B}$, donc $\boxed{v_B > v_A}$.

c) Les conditions sont réunies pour appliquer la relation de Bernoulli entre A et B, pris sur une même ligne de courant : $P_A + \rho\frac{v_A^2}{2} + \rho g z_A = P_B + \rho\frac{v_B^2}{2} + \rho g z_B$. En ordre de grandeur, $\rho g(z_A - z_B) \approx 10^3 \times 10 \times 10^{-1} = 10^3$ Pa alors que $P_A \approx 10^5$ Pa donc on peut négliger ces termes, et il reste : $P_B - P_A = \rho\left(\frac{v_A^2}{2} - \frac{v_B^2}{2}\right)$ soit $\boxed{P_B - P_A = \rho\frac{v_A^2}{2}\left(1 - \frac{R_A^4}{R_B^4}\right)}$ (< 0).

d) Si $P_B < \Pi$, <u>l'eau se transforme en vapeur</u>, c'est-à-dire qu'on voit apparaître des bulles qui perturbent l'écoulement.

e) On veut maintenir $P_B = P_A + \rho\frac{v_A^2}{2}\left(1 - \frac{R_A^4}{R_B^4}\right) > \Pi$, donc $\boxed{v_A < \sqrt{\frac{2(P_A - \Pi)R_B^4}{\rho(R_A^4 - R_B^4)}} = v_{A,\max}}$. AN $\boxed{v_{A,\max} = 0{,}57\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

Débit volumique maximal : $\boxed{D_{V,\max} = \pi R_A^2 v_{A,\max}}$. AN $\boxed{D_{V,\max} = 1{,}8\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^3\cdot s^{-1}} = 0{,}18\ \mathrm{L\cdot s^{-1}}}$.

¤ Exercice 7

a) L'écoulement étant incompressible, il y a conservation du débit volumique, donc $A_{H^-} v_{H^-} = A_{H^+} v_{H^+}$, d'où $\boxed{v_{H^-} = v_{H^+}}$ puisqu'on a supposé $A_{H^-} = A_{H^+} = A_H$. De même on obtient $\boxed{A_g v_g = A_H v_H = A_d v_d}$.

b) Entre A_g et A_{H^-} : $P_0 + \rho\frac{v_g^2}{2} + 0 = P_- + \rho\frac{v_H^2}{2} + 0$. Entre A_{H^+} et A_d : $P_+ + \rho\frac{v_H^2}{2} + 0 = P_0 + \rho\frac{v_d^2}{2} + 0$. On élimine P_0 et $\rho\frac{v_H^2}{2}$ entre les deux : $P_+ - \rho\frac{v_d^2}{2} = P_- - \rho\frac{v_g^2}{2}$ ou encore $\boxed{\rho\left(v_g^2 - v_d^2\right) = 2\left(P_- - P_+\right)}$.

Entre A_{H^-} et A_{H^+}, l'écoulement n'est pas stationnaire puisque l'hélice est en rotation.

c) On définit tout d'abord un système fermé à partir de la surface de contrôle Σ délimitée par les sections A_{H^-} et A_{H^+} : à l'instant t, le système comporte la masse de fluide dans Σ et la masse $D_m\,\mathrm{d}t = \rho A_H v_H\,\mathrm{d}t$ qui va entrer entre t et $t+\mathrm{d}t$; à l'instant $t+\mathrm{d}t$, il comporte la masse de fluide dans Σ et la masse $\rho A_H v_H\,\mathrm{d}t$ qui est sortie entre t et $t+\mathrm{d}t$. Bilan de quantité de mouvement :

$\frac{\vec{p}(t+\mathrm{d}t) - \vec{p}(t)}{\mathrm{d}t} = -\vec{F} + \vec{F_p}$ (l'action du poids étant négligée sur cet écoulement horizontal), soit $\vec{0} = -F\vec{e_x} + P_- A_H \vec{e_x} - P_+ A_H \vec{e_x}$ (la force de pression sur la surface latérale étant nulle par symétrie), donc $\boxed{F = (P_- - P_+)A_H = \frac{1}{2}\rho\left(v_g^2 - v_d^2\right)A_H}$.

On procède de même entre les sections A_g et A_d : $D_m v_d \vec{e_x} - D_m v_g \vec{e_x} = -F\vec{e_x} + \vec{0}$ (surface entièrement entourée de la même pression P_0) donc $\boxed{F = D_m(v_g - v_d)}$ avec $D_m = \rho A_H v_H = \rho A_g v_g = \rho A_d v_d$. Si on divise membre à membre ces deux équations on obtient : $1 = \frac{1}{2}\rho\frac{v_g + v_d}{D_m}A_H$ d'où $\boxed{v_H = \frac{v_g + v_d}{2}}$.

D'autre part, en éliminant maintenant v_d : $F = \frac{1}{2}\rho\left(v_g^2 - (2v_H - v_g)^2\right)A_H$ soit finalement $\boxed{F = 2\rho v_H(v_g - v_H)A_H}$.

d) Faisons maintenant un bilan d'énergie cinétique sur le fluide entre les sections A_{H^-} et A_{H^+} : $\frac{E_c(t+\mathrm{d}t) - E_c(t)}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{P} + \mathcal{P}_p$ soit $0 = -\mathcal{P} + (P_- - P_+)A_H v_H$ d'où $\mathcal{P} = (P_- - P_+)A_H v_H = F v_H$ soit $\boxed{\mathcal{P} = 2\rho v_H^2(v_g - v_H)A_H}$.

e) Avec le paramètre u : $\mathcal{P} = 2\rho v_g^3 A_H u^2(1-u)$. Puisque v_H, v_g et v_d sont positives, alors $\frac{1}{2} < u$, et d'autre part $u < 1$ puisque F et $\mathcal{P}$ sont positives. Dans cet intervalle, la fonction $u^2(1-u)$ est maximale en $\boxed{u = \frac{2}{3}}$: alors $\boxed{F = \frac{4}{9}\rho v_g^2 A_H}$ et $\boxed{\mathcal{P}_{max} = \frac{8}{27}\rho v_g^3 A_H}$.

f) AN $\boxed{F = 110\ \mathrm{kN}}$ et $\boxed{\mathcal{P}_{max} = 0,71\ \mathrm{MW}}$.