Devoir test de physique n° 3

Cet énoncé comporte trois problèmes.
Durée : quatre heures. L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Problème A

Appareil photographique

I.1 - Objet et image

On modélise un appareil photo (**figure 1**) par l'association d'une lentille mince (*L*) de focale $f' = \overline{OF'}$ appelée " objectif ", d'un capteur (C) sur lequel on souhaite récupérer l'image et d'un diaphragme (D) placé devant la lentille.

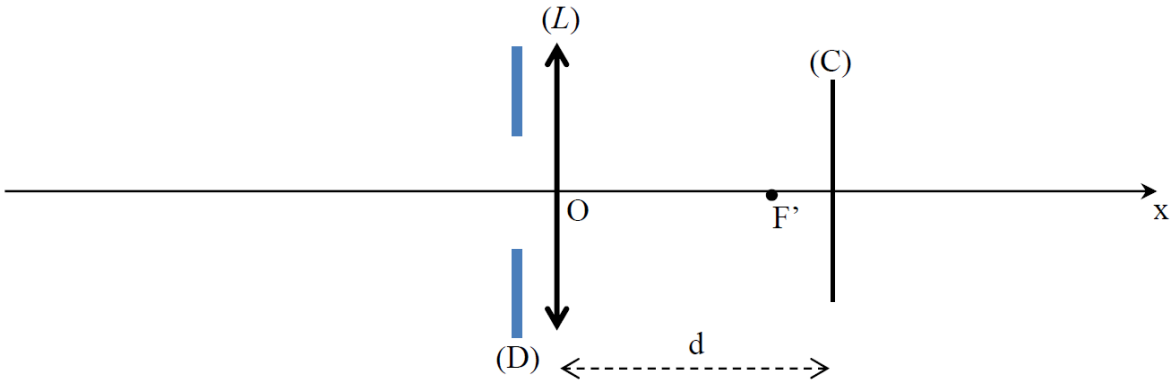


Figure 1 - Modélisation d'un appareil photo

La distance d entre la lentille (*L*) et le capteur (C) est réglable, grâce à un mécanisme lié à l'objectif ; elle est comprise entre d_{min} et d_{max}.

À l'aide de cet appareil, on souhaite former sur le capteur l'image d'un arbre de hauteur h situé à une distance L devant l'objectif.

Q1. **a)** La lentille mince est utilisée dans les " conditions de Gauss ". Préciser en quoi elles consistent.
b) Quelle partie de l'appareil permet d'assurer que ces conditions sont remplies ?

Q2. **a)** Faire un schéma soigné de la situation en notant AB l'objet et A'B' son image sur le capteur (A est sur l'axe et AB appartient à un plan orthogonal à l'axe). Positionner les foyers principaux et tracer au moins deux rayons lumineux issus de B pour justifier la position de l'image A'B'.
b) Exprimer la taille $\overline{A'B'}$ de l'image de l'arbre sur le capteur en fonction de h, f' et L. Calculer cette taille avec $f' = 50$ mm, $h = 5$ m et $L = 20$ m.

Rappel : l'objet AB et l'image A'B' donnée par la lentille mince de centre O et de foyers principaux F (objet) et F' (image) dans les conditions de Gauss sont liés par les relations :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \quad ; \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad ; \quad \overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -\left(\overline{OF'}\right)^2 \quad ; \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} .$$

Q3. **a)** Quelle est la valeur de d lorsque l'objet est à l'infini ?
b) Montrer qu'il existe une distance limite notée L_{min} en dessous de laquelle il ne sera pas possible d'obtenir une image sur le capteur, alors que ce serait toujours possible pour des valeurs supérieures à L_{min}.
c) Exprimer L_{min} en fonction de f' et d_{max}.
d) Calculer L_{min} pour $f' = 50$ mm et $d_{max} = 55$ mm.

I.2 - Influence de la focale

On souhaite obtenir une image de l'arbre sur le capteur plus grande sans changer de place (donc en gardant la même valeur pour L). On change donc l'objectif et on le remplace par un objectif de focale $f_1' = 100$ mm. La distance d est toujours réglable mais les valeurs d_{min} et d_{max} sont différentes des valeurs de **Q3**.

Q4. **a)** Quelle sera la taille de l'image de l'arbre sur le capteur ?
b) Si on suppose que le capteur a pour dimensions : 24 mm × 36 mm, sera-t-il possible de voir l'arbre en entier sur la photo obtenue ?

(Question **Q5** supprimée)

On souhaite maintenant réaliser un téléobjectif en utilisant deux lentilles : une lentille (L_1) convergente et une lentille (L_2) divergente, séparées par une distance e. La distance L entre (L_1) et l'arbre n'a pas changé.

Q6. La lentille (L_1), de focale f_1', donne de l'arbre AB une image intermédiaire A_1B_1 qui joue le rôle d'objet pour la lentille (L_2), de focale f_2', qui en donne une image finale A'B'.

a) Exprimer la distance $\overline{O_2A_1}$ en fonction de f_1' et e (en utilisant une approximation justifiée).
b) L'image A'B' doit être réelle. En déduire que la distance e entre les centres des deux lentilles doit être située dans une plage de valeurs bien précise. Exprimer cette condition sur e sous la forme d'une double inégalité sur e, f_1' et f_2' (en utilisant une approximation justifiée).
c) Vérifier que cette condition est réalisée avec $f_1' = 10$ cm, $f_2' = -5$ cm et $e = 8$ cm.

Q7. Avec les valeurs numériques de **Q6c** :
a) Calculer la distance d,
b) Calculer la taille de l'image $\overline{A'B'}$ de l'arbre sur le capteur.
c) Indiquer si ce téléobjectif est équivalent à l'objectif de **Q4.**

(Partie **I.3** et question **Q8** supprimées)

I.4 - Comment expliquer les propriétés des lentilles ?

Les propriétés optiques des lentilles viennent de leur forme géométrique.
Pour en proposer une explication, on considère une lentille plan-convexe (**figure 2**) constituée d'un verre d'indice n. L'indice de l'air ambiant est égal à 1.
La partie sphérique de la lentille est une portion de sphère de centre C et de rayon $R = CB$. L'épaisseur de la lentille au centre est $e = OS$.
On considère un rayon incident parallèle à l'axe optique, à une distance h de celui-ci. Ce rayon pénètre dans la lentille en A et est réfracté en B. On note i et r les angles incident et réfracté, comptés par rapport à la normale (CB). Le rayon émergent de la lentille coupe l'axe optique en F'.
On note K le projeté orthogonal de B sur l'axe optique.

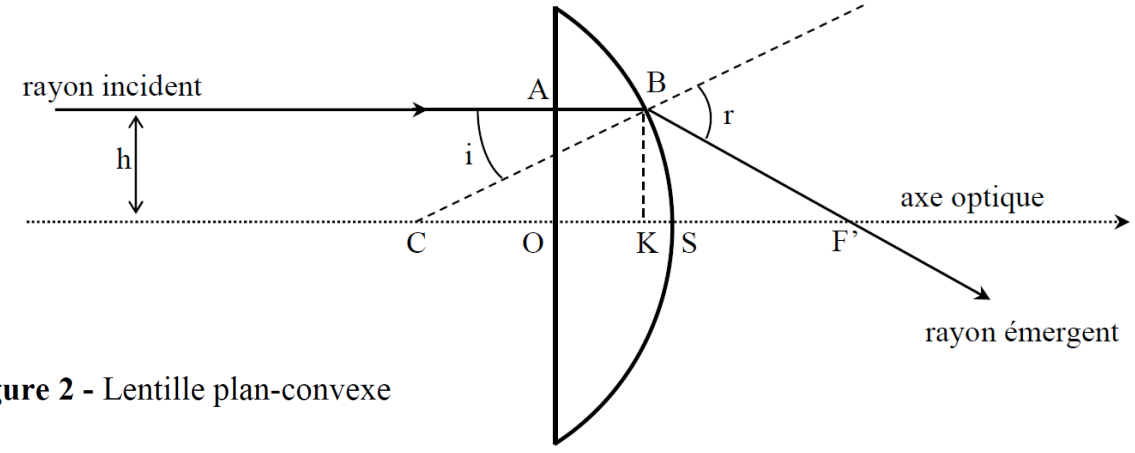


Figure 2 - Lentille plan-convexe

Q9. **a)** Écrire la loi de la réfraction en B.

b) Montrer que la distance OF' peut se mettre sous la forme :

$$OF' = e - R\left[1 - \cos(i)\right] + \frac{R\sin(i)}{\tan(r-i)}.$$

Q10. **a)** La lentille constitue-t-elle un système rigoureusement stigmatique ?

b) Si on considère une lentille mince (e faible devant R) et des rayons paraxiaux, peut-on dire que le système est approximativement stigmatique ? Justifier.

c) Dans le cas de la lentille mince, donner une expression approchée de la distance OF'.

Q11. On suppose que cette lentille possède les propriétés des lentilles minces utilisées dans les conditions de Gauss, que F' est son foyer principal image et O est son centre optique. On considère le rayon qui coïncide avec l'axe et qui n'est donc pas dévié par la lentille.

a) Exprimer le chemin optique (OSF') en fonction de e, n et R.

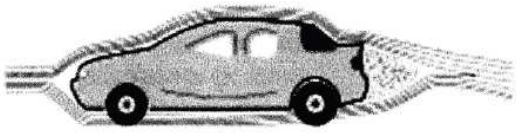
b) En justifiant par un théorème (à citer), quelle relation existe-t-il entre le chemin optique (ABF') et le chemin optique (OSF') ?

Problème B

Aspects aérodynamiques d'une automobile

La **figure 1** montre l'allure des lignes de courant obtenues en soufflerie pour deux véhicules, l'un du type berline (semi-fastback) et l'autre correspondant à la version à hayon généralement dénommée break ou SW (hatchback). Les sections de référence et les coefficients aérodynamiques de ces deux véhicules sont un peu différents. L'écoulement de l'air est supposé incompressible.

Carrosserie semi-fastback



Carrosserie hatchback

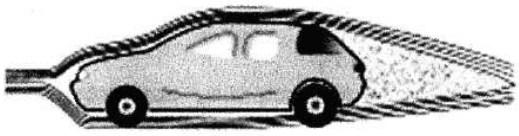


Figure 1 – Essais en soufflerie

On rappelle l'expression de la force de traînée : $F_x = \frac{C_x \rho_0 S V^2}{2}$, où ρ_0 = 1,2 kg.m^{-3} est la masse volumique de l'air, V la vitesse relative de l'air par rapport à l'obstacle, C_x le coefficient aérodynamique de traînée de l'obstacle et S la section de référence de l'obstacle à l'écoulement.

Q1. Préciser les zones d'écoulement laminaire et turbulent. Quels sont les facteurs qui influencent le coefficient aérodynamique C_x.

On considère une automobile de masse m = 1 300 kg, de coefficient aérodynamique C_x = 0,33, de section de référence S = 2,5 m^2 et dont le moteur développe une puissance P = 62,5 kW.

Q2. En négligeant dans cette question les frottements entre les pneumatiques et la route et en supposant l'air environnant au repos dans le référentiel terrestre, exprimer la vitesse maximale de l'automobile en fonction de tout ou partie des données précitées, puis en donner une valeur numérique en km/h.

Q3. Sur route ou autoroute, à vitesse stabilisée, la consommation en carburant, exprimée en litres pour 100 km parcourus, augmente en V^x. Déterminer l'exposant x.

Pour améliorer la tenue de route, certaines voitures sportives sont équipées d'un aileron pour renforcer l'appui arrière (**figure 2**, page 3). On se propose ici de quantifier son influence.



Figure 2 – Aileron arrière

L'air est assimilé à un fluide parfait. Son écoulement, dans le référentiel de la voiture, est supposé stationnaire et incompressible. L'effet de la pesanteur sur l'air est négligé.

L'aileron, incliné vers le haut d'un angle non orienté $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par rapport à la route, dévie l'air qui s'écoule tangentiellement à la partie arrière du véhicule qui est inclinée vers le bas d'un angle, non orienté $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par rapport à la route.

On note S_e la section transverse de l'écoulement de l'air dévié par l'aileron. Cette section est supposée constante le long du tube de courant décrit sur la **figure 3**.

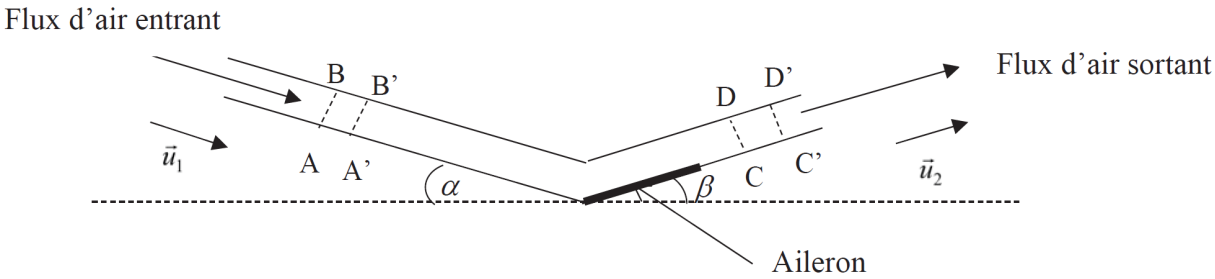


Figure 3 – Écoulement de l'air dans un tube de courant

On note respectivement $\vec{v}_1 = v_1\vec{u}_1$ et $\vec{v}_2 = v_2\vec{u}_2$, les vitesses des écoulements d'air entrant et sortant du tube de courant. $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont des vecteurs unitaires.

On considère le système fermé, constitué par l'air compris entre les sections AB et CD à la date t et de l'air compris entre les sections A'B' et C'D' à la date t + dt.

Q4. On note dm_1 la masse qui traverse la section AB entre t et t + dt et dm_2 la masse qui traverse la section CD entre t et t + dt. Comparer dm_1 et dm_2 ainsi que v_1 et v_2.

Q5. En effectuant un bilan de quantité de mouvement sur le système fermé défini précédemment, déterminer la force exercée sur le tube de courant en fonction de ρ_0, v_1, S_e, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

Q6. On admet que la force $\vec{F}_{air\to véhicule}$ exercée par l'air sur le véhicule en mouvement est l'opposée de celle exercée sur le tube de courant. En déduire la composante perpendiculaire à la route de la force exercée par l'air sur le véhicule en fonction de ρ_0, v_1, S_e, α et β. Discuter du sens de cette composante.

Problème C

Glissement d'un liquide sur une paroi solide en microfluidique

L'étude d'écoulements au sein de microsystèmes, c'est-à-dire de canaux de taille de l'ordre de quelques dizaines de micromètres, présente aujourd'hui un enjeu industriel majeur. Des recherches portent sur l'utilisation de surfaces hydrophobes texturées pour lesquelles l'expérience met en évidence des propriétés de glissement des liquides à l'échelle de la microfluidique, donc une réduction des effets de friction de l'écoulement sur les parois solides.

On propose dans cette sous-partie d'étudier l'influence du glissement d'un liquide sur une paroi solide dans le cas d'un écoulement de Poiseuille plan.

Le liquide considéré est assimilé à un fluide newtonien de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η. L'écoulement est stationnaire, incompressible et unidirectionnel. Il s'effectue entre deux plans, fixes dans le référentiel d'étude galiléen, de longueur L selon $\vec{u}_x$, de largeur considérée comme infinie selon $\vec{u}_y$, situés en $z = -h/2$ et $z = +h/2$ (**figure 9**).

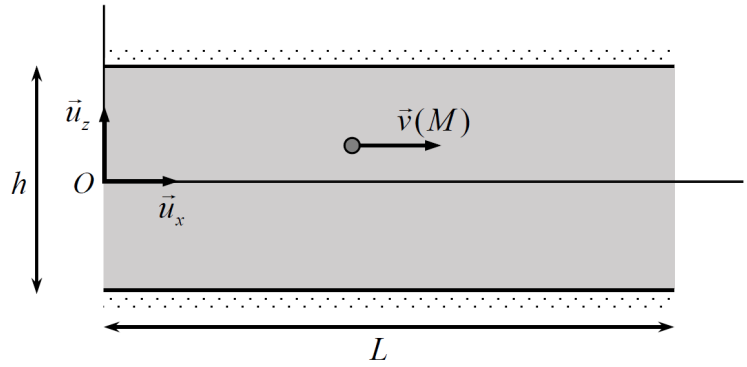


Figure 9 - Écoulement dans un canal rectangulaire (écoulement de Poiseuille plan)

L'écoulement est induit par un gradient de pression horizontal, appliqué parallèlement à la direction $\vec{u}_x$, de la forme $\frac{\partial P}{\partial x} = -K$ où K est une constante positive. Les effets de la pesanteur sont par ailleurs négligés. Dans ces conditions, le champ des vitesses en tout point M entre ces deux plans est de la forme $\vec{v}(M) = v_x(z)\vec{u}_x$ et l'équation de Navier-Stokes se réduit à la forme : $\rho\left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta\Delta\vec{v}$.

Q32. Rappeler le sens physique de chacun des termes de l'équation de Navier-Stokes réduite de l'énoncé.

Q33. Calculer le nombre de Reynolds Re pour un écoulement d'eau dans un canal d'une hauteur de 10 µm à une vitesse typique de $1\ \text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$. Comment se simplifie dans ces conditions l'équation de Navier-Stokes ?

Q34. Justifier que la forme supposée du champ des vitesses (écoulement parallèle) conduit à la même simplification et ce, indépendamment de la valeur du nombre de Reynolds.

Q35. Montrer finalement que l'équation de Navier-Stokes se réduit ici à : $-\frac{\partial P}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0$.

La condition de non glissement habituellement adoptée dans les écoulements à une échelle macroscopique suppose la vitesse relative liquide-solide nulle. L'existence d'un glissement observé à l'échelle micrométrique impose de fait une modification des conditions aux limites pour le champ des vitesses en $z = \pm h/2$. Navier puis Maxwell ont proposé d'écrire ces conditions sous la forme :

$$v_x(z = +h/2) = -L_g \left.\frac{\partial v_x}{\partial z}\right|_{z=+h/2} \quad \text{et} \quad v_x(z = -h/2) = +L_g \left.\frac{\partial v_x}{\partial z}\right|_{z=-h/2}$$

où la longueur L_g est appelée longueur de glissement.

Q36. Déduire de ces conditions aux limites que $v_x(z) = \frac{KL_g h}{2\eta} + \frac{K}{2\eta}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)$.

Q37. Déterminer les positions théoriques z_0 des plans au niveau desquels le champ des vitesses devrait s'annuler. Dans l'hypothèse où $L_g \ll h$, montrer que $L_g = |z_0| - \frac{h}{2}$. Justifier alors l'appellation longueur de glissement attribuée à la longueur L_g.

Q38. Exprimer le débit volumique D_v à travers une section droite comprise entre les deux plans et de largeur ℓ selon $\vec{u}_y$.

Q39. Exprimer K en fonction de L et de la perte de charge $\Delta P = P(0) - P(L)$ imposée entre l'entrée $(x = 0)$ et la sortie $(x = L)$ du canal.

Q40. En déduire que $\Delta P = R_h D_v$. Donner l'expression de R_h en fonction de η, L_g et des dimensions du canal. Justifier par une analogie électrique le nom de « résistance hydraulique » qu'on lui donne.

Q41. En considérant que $L_g / h = 0{,}5$, calculer le rapport $R_h / R_{h,ng}$ où $R_{h,ng}$ désigne la résistance hydraulique en l'absence de glissement $(L_g = 0)$. Conclure.

Données

▪ Opérateur gradient d'un champ scalaire U :

- $\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z$ en coordonnées cartésiennes
- $\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z$ en coordonnées cylindriques
- $\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$ en coordonnées sphériques

▪ Opérateur laplacien vectoriel d'un champ vectoriel $\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z$ en coordonnées cartésiennes : $\Delta\vec{a} = (\Delta a_x)\vec{u}_x + (\Delta a_y)\vec{u}_y + (\Delta a_z)\vec{u}_z$ où $\Delta a_{i=x,y,z} = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_i}{\partial z^2}$

▪ Intensité de la pesanteur : $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

▪ Masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1{,}00\cdot 10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$

▪ Viscosité dynamique de l'eau à 20 °C sous 1 bar : $\eta_e = 1{,}00\cdot 10^{-3}\ \text{Pa}\cdot\text{s}$
