Complément aux TP – Mesures, calculs et incertitudes

1. Définitions et notations

a) Incertitude-type et incertitude élargie

● Quand on détermine une grandeur x, par la mesure ou par le calcul, la valeur obtenue n'a pas une précision infinie : elle est assortie d'une *incertitude*, qui définit un intervalle de valeurs *(intervalle de confiance)* dans lequel se trouve la valeur réelle avec une grande probabilité.

● L'*incertitude-type* sur x, notée $u(x)$, correspond à un niveau de confiance de 68 % (cette valeur est issue d'un modèle statistique). Autrement dit, lorsque la mesure ou le calcul de x donne un résultat *(valeur estimée)* x_{est}, on admet que la valeur réelle de x se trouve dans l'intervalle $[x_{\text{est}} - u(x) ; x_{\text{est}} + u(x)]$ avec une probabilité de 68 %.

● Pour un niveau de confiance de 95 %, utilisé le plus souvent, on définit l'*incertitude élargie* $U(x)$ en multipliant $u(x)$ par un facteur d'élargissement, généralement pris égal à 2 : $U(x) = 2\,u(x)$.

b) Écriture d'un résultat

● En toute rigueur, pour donner le résultat d'une mesure ou d'un calcul on doit donner séparément les valeurs x_{est} et $u(x)$. Il est cependant fréquent de l'écrire sous la forme compacte : $x = x_{\text{est}} \pm u(x)$.

Ⓔ Si on trouve $x_{\text{est}} = 25{,}4$ cm et $u(x) = 0{,}3$ cm, on peut écrire : $x = 25{,}4 \pm 0{,}3$ cm.

Mais attention, il vaut mieux préciser dans ce cas que l'incertitude utilisée est l'incertitude-type. En effet, certains auteurs jugent cette notation trompeuse et estiment qu'il faudrait plutôt écrire : $x = x_{\text{est}} \pm U(x)$ (soit une incertitude deux fois plus grande, donnant un intervalle plus réaliste).

● La détermination de l'incertitude (voir méthodes dans la suite) étant elle-même imprécise, on la donnera généralement avec un seul chiffre significatif, ou deux au maximum. Elle porte obligatoirement sur le(s) dernier(s) chiffre(s) significatif(s) de x.

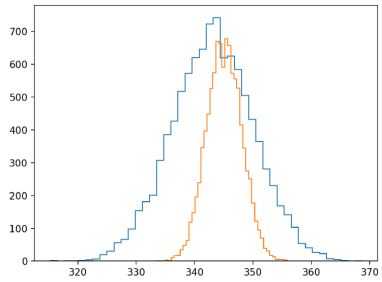
c) Écart normalisé

Si on veut comparer deux valeurs x et y (résultats de deux expériences, résultat d'une expérience et valeur théorique…), pour lesquelles on dispose de la valeur estimée et de l'incertitude, on doit calculer leur *écart normalisé* :

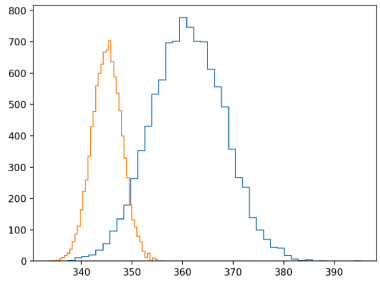
$$E = \frac{|x_{\text{est}} - y_{\text{est}}|}{\sqrt{u(x)^2 + u(y)^2}}.$$

Par convention, on estime généralement que les deux valeurs sont compatibles si $E < 2$.

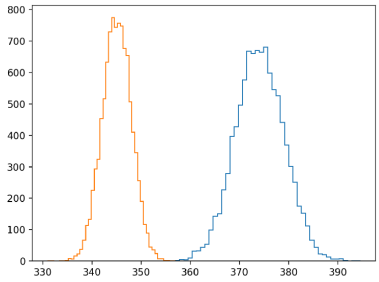
Exemple de deux distributions de résultats de mesures (auteur : Maxime CHAMPION, lycée Thiers, Marseille)



$E = 0{,}3$: bien compatibles



$E = 2{,}1$: pas vraiment compatibles



$E = 5{,}0$: franchement incompatibles

2. Évaluation de la valeur estimée et de l'incertitude

a) Évaluation de type A

Une première méthode consiste à répéter la mesure N fois : on obtient N valeurs de mesure $x_{\text{mes},i}$. On définit alors deux grandeurs mathématiques :

– la moyenne arithmétique $\overline{x_{\text{mes}}} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{\text{mes},i}$;

– l'écart-type expérimental $\sigma = \sqrt{\dfrac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_{\text{mes},i} - \overline{x_{\text{mes}}}\right)^2}$ indiquant la dispersion des données autour de la moyenne.

Pour la valeur estimée on prend la moyenne des valeurs mesurées : $x_{\text{est}} = \overline{x_{\text{mes}}}$. L'incertitude-type est $u(x) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$.

b) Évaluation de type B

Si on ne peut faire la mesure qu'une fois, la valeur estimée est alors bien sûr celle donnée par cette unique mesure. Pour trouver l'incertitude-type, puisqu'on ne peut pas faire de statistique, on utilise alors d'autres informations : en voici quelques exemples. Là encore, l'incertitude élargie sera $U(x) = 2\,u(x)$.

– Si le constructeur de l'appareil de mesure donne une précision (ou résolution) r, on prend $u(x)=\dfrac{r}{\sqrt{3}}$.

– Si on lit des graduations, l'incertitude-type peut être évaluée à $u(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=0{,}3$ graduation.

– On peut avoir une incertitude de pointage, due à la difficulté d'observation : les valeurs possibles sont dans un intervalle $[x_{\min}\,;x_{\max}]$. La précision est alors $r=\dfrac{x_{\max}-x_{\min}}{2}$ et on prend $u(x)=\dfrac{x_{\max}-x_{\min}}{2\sqrt{3}}$.

c) Incertitude composée

Si on *calcule* x en fonction de données indépendantes a, b, c… l'incertitude $u(x)$ dépend de $u(a)$, $u(b)$, $u(c)$ …

● Formules de calcul théorique

– Pour $x=a+b$ ou $x=a-b$: $\boxed{u(x)=\sqrt{u(a)^2+u(b)^2}}$.

– Pour $x=ab$ ou $x=\dfrac{a}{b}$: $\boxed{\dfrac{u(x)}{x_{\text{est}}}=\sqrt{\left(\dfrac{u(a)}{a_{\text{est}}}\right)^2+\left(\dfrac{u(b)}{b_{\text{est}}}\right)^2}}$.

– Pour $x=f(a)$: $u(x)=\left|\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}a}\right|u(a)$.

– Pour $x=a^n b^p$: $\dfrac{u(x)}{x_{\text{est}}}=\sqrt{\left(n\dfrac{u(a)}{a_{\text{est}}}\right)^2+\left(p\dfrac{u(b)}{b_{\text{est}}}\right)^2}$.

– Pour $x=f(a,b,c...)$:

$$u(x)=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}u(a)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial b}u(b)\right)^2+...}$$

Lorsque l'expression de x comporte de nombreuses opérations et fonctions, le calcul de $u(x)$, qui devrait combiner plusieurs des formules ci-dessus, peut s'avérer trop lourd. Une autre solution est alors de faire une simulation numérique.

● Calcul numérique par simulation : *méthode de Monte Carlo*

La méthode consiste à produire, au moyen d'un code informatique, des valeurs aléatoires des grandeurs a, b, c… en utilisant leurs incertitudes connues, et de calculer à chaque fois la grandeur x ; on détermine alors $u(x)$ par une statistique sur les résultats obtenus.

Dans Python, on peut produire des valeurs aléatoires dans un intervalle spécifié avec deux fonctions de `numpy` :
`random.uniform` si on suppose que la distribution des valeurs possibles est « uniforme » (rectangulaire) ;
`random.normal` si on suppose que la distribution des valeurs possibles est « normale » (gaussienne, plus réaliste).

Ⓔ Voici un exemple de code *(écrit par Maxime CHAMPION)* pour déterminer l'incertitude sur la célérité c d'une onde à partir de sa période ($T=24{,}4$ µs avec $u(T)=0{,}1$ µs) et de la distance entre deux nœuds séparés de 10 longueurs d'onde ($x_A=11{,}1$ cm, $x_B=19{,}5$ cm avec $u(x)=0{,}5$ cm pour chacun). La formule de calcul est $c=\dfrac{\lambda}{T}=\dfrac{x_B-x_A}{10T}$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Entrez la période
T = 24.4e-6 # s
# Entrez la précision sur la période
DeltaT = 0.1e-6 # s
# Positions de des points
A = 0.111 # m
B = 0.195 # m
# Entrez les précisions
DeltaA = 0.005 # m
DeltaB = 0.005 # m

# Entrez la fonction de composition
def celerite(T,a,b):
    return (b-a)/(10*T)
# Entrez le nombre de simulation que vous voulez effectuer
N = 100000

# Calculs avec une distribution de probabilité uniforme
Celerite=[]

for i in range(0,N):
    x = np.random.uniform(T-DeltaT,T+DeltaT)
    a = np.random.uniform(A-DeltaA,A+DeltaA)
    b = np.random.uniform(B-DeltaB,B+DeltaB)
    Celerite.append(celerite(x,a,b))
```

```
plt.figure(1)
plt.hist(Difference,bins = 'rice')
plt.title('Résultat du tirage aléatoire du produit après simulation')
plt.xlabel("c (m/s)")

# Calcul et affichage moyenne et écart type
moy = np.mean(Celerite)
std = np.std(Celerite,ddof=1)

print("Moyenne = {:.2f} m/s".format(moy))
print("Ecart type = {:.2f} m/s".format(std))
```

```
Moyenne = 344.31 m/s
Ecart type = 16.76 m/s
```

