Outils mathématique pour la physique

I Développements limités

1) Formule de Taylor

Écriture en mathématiques : h est un paramètre variable tendant vers 0 , et a un réel fixé.

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h).$$

Écriture en physique : $\mathrm{d}x$ est une variation infinitésimale de la coordonnée x.

$$T(x+\mathrm{d}x) = T(x) + \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + o(dx),$$

où sur cet exemple $T(x)$ désigne la température au point d'abscisse x. Usuellement, le terme $o(dx)$ est sous-entendu en physique et on écrit simplement

$$\boxed{T(x+\mathrm{d}x) = T(x) + \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x}.$$

Fonctions de plusieurs variables : dans le cas où la température T peut dépendre de l'espace et du temps, on a au premier ordre en $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}t$

$$\boxed{T(x+\mathrm{d}x, t+\mathrm{d}t) = T(x,t) + \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_t \mathrm{d}x + \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_x \mathrm{d}t}$$

qui fait intervenir les dérivées partielles à t et x fixés.

2) Les incontournables

Attention : Ces développements limités de référence ne s'appliquent que pour un paramètre x sans dimension tendant vers 0. Leur utilisation avec des grandeurs physiques dimensionnées peut donc parfois donner lieu à quelques complications.

- Exponentielle et logarithme : au premier ordre, et pour x très petit :

$$\boxed{e^x \simeq 1 + x \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \simeq x}$$

- Fonctions trigonométriques : pour x très petit

$$\boxed{\cos(x) \simeq 1 - x^2/2} \qquad \boxed{\sin(x) \simeq x} \qquad \boxed{\tan(x) \simeq x}$$

- Puissance : au premier ordre, et pour x très petit,

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x}$$

3) Différentielle

a) Fonction d'une seule variable

Qualitativement (une définition plus rigoureuse sera donnée en maths), on appelle différentielle de la fonction f sa variation sous l'effet d'une variation infinitésimale $\mathrm{d}x$ de sa variable :

$$\boxed{\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x) - f(x)}$$

Au premier ordre en $\mathrm{d}x$ et d'après la formule de Taylor,

$$\boxed{\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x}$$

L'écriture est analogue à une simplification de fraction.

b) Fonction de plusieurs variables

Considérons le cas d'une fonction de deux variables. Dans la même logique que précédemment, on appelle différentielle de la fonction f sa variation sous l'effet d'une variation infinitésimale $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ de ses variables :

$$\boxed{\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - f(x,y)}$$

En utilisant de nouveau la formule de Taylor,

$$\boxed{\mathrm{d}f = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y \mathrm{d}x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x \mathrm{d}y}$$

On voit apparaitre les dérivées partielles de f : calculer les dérivées partielles permet de calculer $\mathrm{d}f$, mais à l'inverse connaître l'expression de $\mathrm{d}f$ en fonction de $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ permet d'identifier les expressions des dérivées partielles, ce qui peut être utile dans certaines applications formelles.

II Analyse vectorielle

1) Nabla

Notation utile pour écrire les opérateurs d'analyse vectorielle, en **cartésien uniquement**, on a une forme simple :

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e_z}}$$

Remarque : On peut écrire ∇ sans flèche par convention car on sait qu'il s'agit obligatoirement d'un vecteur.

2) Gradient

a) Gradient scalaire

Définition mathématique :

Le gradient d'un champ **scalaire** f est un opérateur **vectoriel** et s'écrit en **coordonnées cartésiennes** :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_y}}$$

Interprétation physique :

Le gradient donne le sens de **variation spatiale** d'un scalaire f : la flèche du gradient indique les endroits où la fonction f devient plus intense. Un gradient nul correspond à un champ scalaire **uniforme**.

Remarques importantes :

- ⋆ **Attention**, l'expression du gradient dépend des coordonnées choisies.
- ⋆ Une définition "universelle" du gradient est la suivante : lors d'un petit déplacement $\overrightarrow{dl}$, la fonction f varie d'une petite valeur df telle que $\boxed{df = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f \cdot \overrightarrow{dl}}$. Ainsi, si on connaît l'expression du déplacement élémentaire pour d'autres coordonnées (cylindriques par exemple), on peut connaître l'expression du gradient dans ces nouvelles coordonnées.
- ⋆ Les surfaces **équipotentielles** (lieux où f est constant) sont **orthogonales** au vecteur gradient.

Exemple : Pour des coordonnées cylindriques, si on a $\overrightarrow{dl} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z}$ alors en écrivant

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = (\overrightarrow{\mathrm{grad}} f)_r\overrightarrow{u_r} + (\overrightarrow{\mathrm{grad}} f)_t\overrightarrow{u_\theta} + (\overrightarrow{\mathrm{grad}} f)_z\overrightarrow{u_z}$$

et par définition d'une différentielle pour une fonction à plusieurs variables :

$$df(r,\theta,z) = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}\theta + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

donc en égalisant les deux écritures, on trouve que pour les coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

b) Gradient vecteur

On peut généraliser l'écriture du gradient à un vecteur, on définit alors l'opérateur **vectoriel** gradient vecteur $(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})$ comme

$$(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{V} = A_x\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial x} + A_y\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial y} + A_z\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}$$

3) Divergence

Définition mathématique :

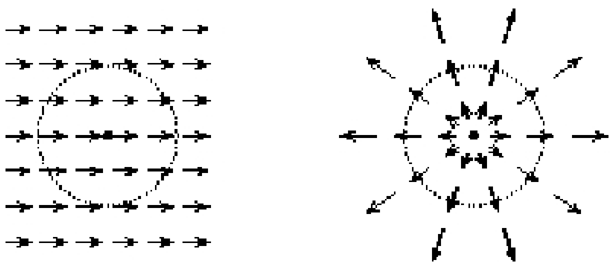
La divergence est un opérateur **scalaire** qui s'applique à une fonction (ou opérateur pour être précis) **vectorielle** $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$. L'expression à connaître est en **coordonnées cartésiennes** :

$$\boxed{\text{div}(\overrightarrow{V}) = \nabla\cdot\overrightarrow{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}}$$

Interprétation physique :

En fait, la divergence d'un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ au point M peut être vue comme la **densité volumique d'écoulement vers l'extérieur de ce champ vectoriel $\overrightarrow{V}$** au voisinage de M. C'est cohérent avec le vocabulaire, car si la divergence est importante (en norme) alors on va avoir un champ vectoriel qui va avoir un flux sortant important, donc qui va "diverger" du point M de manière notoire.

Exemple : En mécanique des fluides, la divergence de la vitesse $\text{div}\overrightarrow{V}$ autour d'une particule de fluide va s'interpréter comme le **taux de dilatation local** de la particule de fluide : si $\text{div}\overrightarrow{V} > 0$ alors la particule de fluide va se dilater et si $\text{div}\overrightarrow{V} < 0$ alors elle va se comprimer.



Remarques importantes :

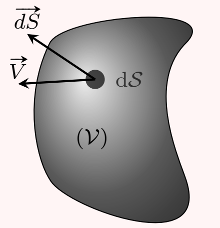
- ⋆ L'expression de la divergence dépend des coordonnées! Pour trouver l'expression dans d'autres coordonnées, il faut effectuer le calcul ci-dessus avec d'autres manières d'exprimer les éléments de volumes élémentaires, l'expression est donc notoirement plus complexe et ne serait **jamais** demandée à retrouver, les formules seront toujours fournies (**autres qu'en cartésien**).

- ⋆ De cette interprétation physique de la divergence découle naturellement le **théorème de Green-Ostrogradski** : comme la divergence est une densité volumique de flux, alors en intégrant sur un volume macroscopique cette divergence, on obtient l'intégrale sur tout le volume de la divergence de $\overrightarrow{V}$ vaut le flux sortant de ce vecteur (les contributions à l'intérieur du volume s'annulent) :

Théorème de Green-Ostrogradski

Pour un champ de vecteur $\vec{V}$, une surface **fermée** Σ_{ferme} avec son vecteur surface élémentaire $d\vec{S}$ **sortant** qui définit un volume $\mathcal{V}$, on a :

$$\boxed{\oiint_{(\Sigma_{ferme})} \vec{V}\cdot d\vec{S} = \iiint_{(\mathcal{V})} \text{div}(\vec{V})d\tau}$$



(S) surface fermée

⋆ Un cas important est quand $\text{div}\vec{V} = 0$, on dit que $\vec{V}$ est à **flux conservatif**. Cela signifie concrètement que le flux total est nul, il y a plusieurs possibilités :
- Soit le champ $\vec{V}$ est nul (peu probable).
- Soit le flux champ $\vec{V}$ se compense sur les différentes faces de la surface fermée (souvent on a une contribution rentrante, une contribution orthogonale à la surface donc de flux nul et une contribution sortante). En pratique, cela va s'interpréter comme une **conservation du produit** $S \times ||V||$, comme par exemple une conservation du débit volumique $D_v = S \times v$.

4) Rotationnel

Définition mathématique :

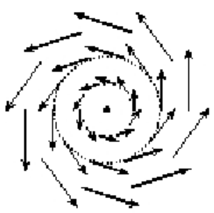
Le rotationnel est un opérateur **vectoriel** qui s'applique à un champ **vectoriel**. En **coordonnées cartésiennes**, il s'écrit simplement :

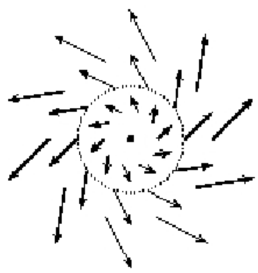
$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = \nabla \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V_z}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial V_x}{\partial z} - \dfrac{\partial V_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}}$$

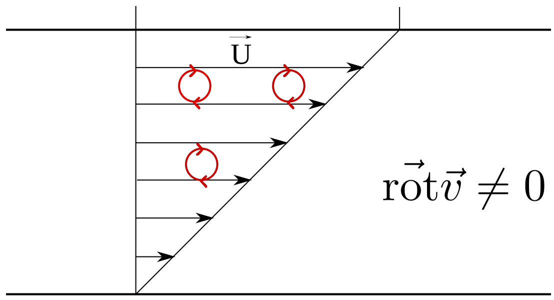
Interprétation physique :

En fait, le rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{V}$ au point M peut être vu comme la **densité surfacique de circulation de** $\vec{V}$ au voisinage de M. C'est cohérent avec le vocabulaire, car si le rotationnel est important (en norme) alors on va avoir un champ vectoriel qui va avoir une circulation importante, donc qui va "tourner" autour du point M de manière.

Exemple : En mécanique des fluides, lorsqu'une particule de fluide tourne sur elle même, elle va avoir une vorticité $\vec{w} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} \neq 0$. Cela peut arriver dans plusieurs cas de figure, ici on illustre quand les lignes de champ de la vitesse font un tourbillon, et quand le champ des vitesses possède un gradient non nul selon une direction (même si les lignes de champ sont parallèles !)







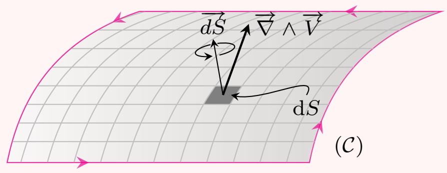
Remarques importantes :

- ⋆ Le rotationnel est en quelque sorte **l'analogue de la divergence pour la circulation**. Si on faiait le même calcul que pour la divergence au voisinage d'un point M, on peut retrouver l'expression du rotationnel cartésien.
- ⋆ Une conséquence importante de l'interprétation physique du rotationnel est le **théorème de Stokes** : comme le rotationnel est une densité surfacique de circulation, alors en intégrant sur une surface macroscopique cet rotationnel, on obtient l'intégrale sur toute la surface du rotationnel de $\vec{V}$ vaut la circulation (orientée par le sens du vecteur surface) de ce vecteur (les contributions à l'intérieur de la surface s'annulent) :

❤ Théorème de Stokes

Pour un champ de vecteur $\vec{V}$, un contour **orienté et fermée** $\mathcal{C}_{ferm}$ avec son vecteur surface élémentaire $d\vec{S}$ (**définit par le sens de parcours du contour**) qui définit une surface $\mathcal{S}$ (ouverte), on a :

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}_{ferm}} \vec{V}\cdot d\vec{l} = \iint_{(\mathcal{S})} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})\cdot d\vec{S}}$$



- ⋆ Un cas important est quand $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = 0$, on dit que $\vec{V}$ est à **circulation conservative**. Cela signifie concrètement que la circulation totale est nulle, il y a plusieurs possibilités :
  - Soit le champ $\vec{V}$ est nul (peu probable).
  - Soit la circulation du champ $\vec{V}$ se compense sur les différents côtés du contour fermé (souvent on a une contribution dans le sens de parcours, une contribution orthogonale au contour donc de circulation nulle et une contribution dans le sens contraire au parcours du contour). En pratique, cela va s'interpréter comme le fait **que la circulation entre deux points ne dépend pas du chemin suivi.**

5) Laplacien

a) Laplacien scalaire

C'est un opérateur **scalaire du second ordre** qu'on applique à un champ de scalaire f. Son expression en**coordonnées cartésiennes** est :

$$\boxed{\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

Son expression est plus compliquée dans les autres types de coordonnées et elle sera fournie le cas échéant.

b) Laplacien vectoriel

C'est un opérateur **vectoriel du second ordre** qui s'applique à un champ **vectoriel**. On peut le voir comme la généralisation en 3D du laplacien scalaire. Sa formule **en coordonnées cartésiennes** pour un champ de vecteur $\vec{V}$ est la suivante :

$$\boxed{\Delta\vec{V} = \begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix}}$$

avec Δ le laplacien scalaire.

Remarques importantes :

- 💣💣**Attention à ne pas oublier des termes dans l'expression du laplacien vectoriel** : en effet, on a 3 terme par composante donc 9 termes au total !
- Cette définition n'est pas générale car elle dépend du système de coordonnées. De manière générale, le laplacien vectoriel est définit comme $\Delta\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{V}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V})$.

6) Relations vectorielles utiles

Tous les opérateurs sont **linéaires** :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha\overrightarrow{\text{grad}}(f_1) + \beta\overrightarrow{\text{grad}}(f_2)$$

- $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = 0$ (par ❤)
- $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}) = 0$ (par ❤)
- $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \Delta f$ (par ❤)
- $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{V}) - \Delta\vec{V}$ (par ❤)

De manière plus accessoire :

▷ $\overrightarrow{\text{grad}}(f_1 f_2) = f_1\overrightarrow{\text{grad}} f_2 + f_2\overrightarrow{\text{grad}} f_1$

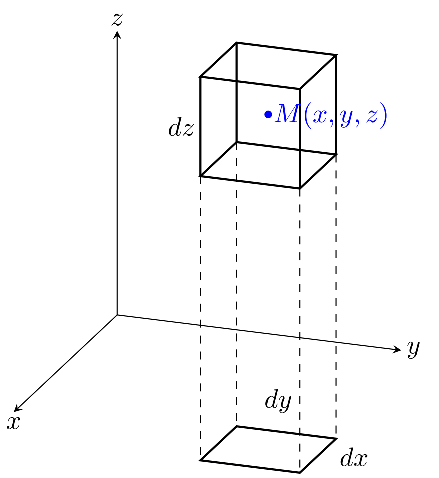
▷ $\text{div}(f\vec{V}) = f\text{div}\vec{V} + \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{V}$

▷ $\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{V}) = f\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{V}$

▷ Double produit vectoriel : $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

III Systèmes de coordonnées

1) Coordonnées cartésiennes



- **Coordonnées** :
  - ▷ $x \in [0, +\infty]$
  - ▷ $y \in [0, \infty]$
  - ▷ $z \in [0, +\infty]$
- **Déplacement élémentaire** :

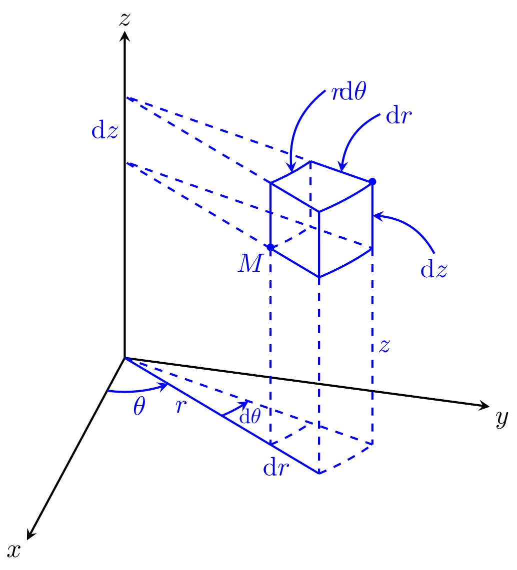
$$\overrightarrow{dM} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z}$$

- **Volume élémentaire**

  C'est le produit des 3 déplacements élémentaires :

$$d\tau = dxdydz$$

2) Coordonnées cylindriques



- **Coordonnées** :
  - ▷ $r \in [0, +\infty]$
  - ▷ $\theta \in [0, 2\pi]$
  - ▷ $z \in [0, +\infty]$
- **Déplacement élémentaire** :

$$\overrightarrow{dM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z}$$

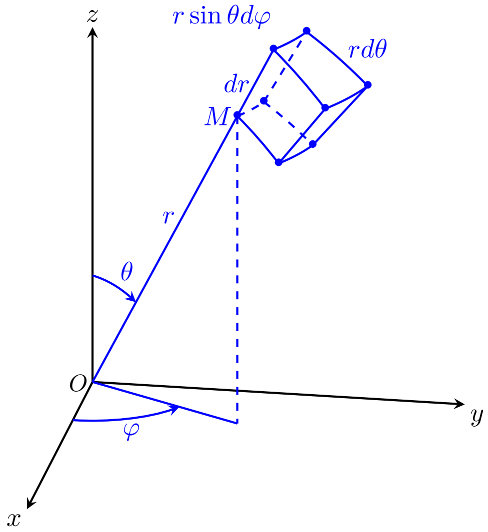
- **Volume élémentaire**

  C'est le produit des 3 déplacements élémentaires :

$$d\tau = rdrdzd\theta$$

Remarque : Dans un plan $z = cte$, les coordonnées cylindriques coïncident avec les coordonnées polaires planes, d'où la dénomination de coordonnées "cylindro-polaires ".

3) Coordonnées sphériques



- **Coordonnées** :
  - ▷ $r \in [0, +\infty]$
  - ▷ $\theta \in [0, \pi]$
  - ▷ $\varphi \in [0, 2\pi]$
- **Déplacement élémentaire** :

$$\overrightarrow{dM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$$

- **Volume élémentaire**

  C'est le produit des 3 déplacements élémentaires

$$d\tau = r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta$$

Remarque : Dans un plan $\varphi = cte$, les coordonnées cylindriques coïncident avec les coordonnées polaires planes, ce qui justifie le nom des coordonnées θ et φ. Bien qu'à première vue on puisse penser que le θ cylindrique corresponde au φ sphérique, c'est en fait faux.