Mémo analyse vectorielle

Nous résumons ici les outils mathématiques à connaître en Physique pour décrire localement des variations spatiales de champs qu'on rencontre en diffusion, mécanique des fluides, physique des ondes et électromagnétisme.

I Opérateurs du premier ordre

Nous commençons par décrire des opérateurs du premier ordre, c'est-à-dire des opérateurs faisant intervenir des dérivées partielles spatiales d'ordre 1.

1) Gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$

Cet opérateur s'applique à un champ scalaire et renvoie un champ vectoriel (c'est pour cela qu'il y a une flèche sur l'opérateur gradient).

Définition : Gradient

Soit $f(M)$ un champ scalaire. Le gradient de f est le champ vectoriel tel que pour tout déplacement infinitésimal $\mathrm{d}\vec{l}$, la variation infinitésimale de f s'écrit :

$$\boxed{\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

Expression en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes, le gradient est le vecteur dont les composantes sont les dérivées premières spatiales de f :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}}$$

Signification physique

Le gradient donne le sens de variation spatiale d'un champ scalaire f : la flèche du gradient indique les endroits où la fonction f devient plus importante.

On dit qu'un champ vectoriel $\vec{A}$ dérive d'un potentiel scalaire f si en tout point de l'espace :

$$\boxed{\vec{A}(M) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(M)}$$

2) Divergence div

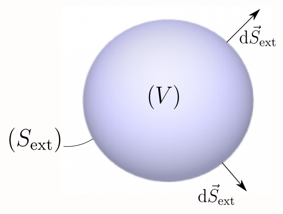
Cet opérateur s'applique à un champ vectoriel et renvoie un champ scalaire (il n'y a pas de flèche sur l'opérateur divergence).

On définit l'opérateur divergence à partir du théorème de Green-Ostrogradski.

Définition : Divergence - Théorème de Green-Ostrogradski

Soit $\vec{A}(M)$ un champ vectoriel. Il existe un unique champ scalaire appelé divergence de $\vec{A}$ tel que, pour tout volume (V) limité par une surface **fermée** (S_{ext}) orientée par sa normale **sortante**, le flux de $\vec{A}$ à travers (S_{ext}) vaut :

$$\boxed{\oiint_{(S_{\text{ext}})} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_{\text{ext}} = \iiint_{(V)} \mathrm{div}\,\vec{A}\,\mathrm{d}\tau}$$



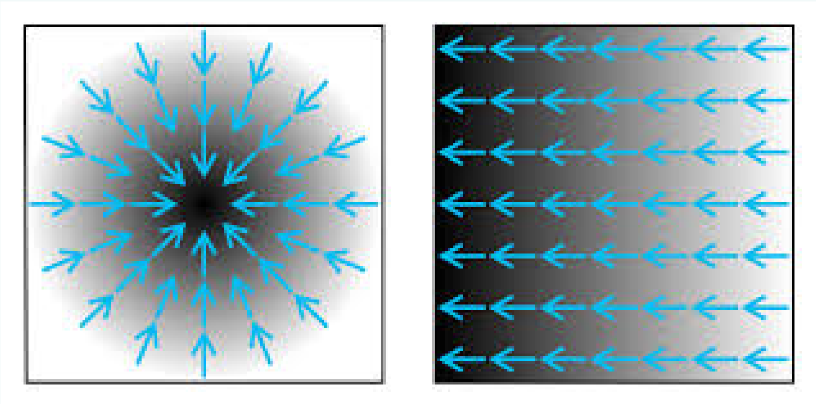
Expression en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes, la divergence est la somme des dérivées partielles premières des composantes par rapport aux variables :

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{A}(x,y,z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

Signification physique

La divergence d'un champ vectoriel $\vec{A}$ au point M peut être vue comme la densité volumique d'"écoulement" vers l'extérieur de ce champ vectoriel $\vec{A}$ au voisinage de M et mesure à quel point un champ vectoriel "rentre" ou "sort" d'une certaine zone de l'espace.



A gauche, la divergence du champ vectoriel est négative : le champ rentre vers le centre et à droite, la divergence est nulle en tout point (car les flèches ont même longueur : "ce qui rentre dans le volume est égal à ce qui en sort").

On dit qu'un champ vectoriel $\vec{A}$ est à ***flux conservatif*** *si en tout point de l'espace :*

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{A} = 0 \Leftrightarrow \oiint_{(S_{\text{ext}})} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_{\text{ext}} = 0}$$

Le flux du champ $\vec{A}$ se compense alors sur les différentes faces de la surface fermée : le flux à travers une surface entrante est compensé par le flux à travers une surface sortante : le flux de $\vec{A}$ à travers une surface (entrante ou sortante) est donc ***constant****.*

3) Rotationnel $\vec{\mathrm{rot}}$

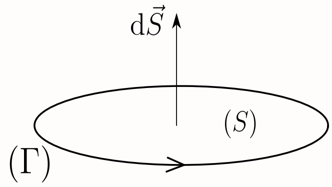
Cet opérateur s'applique à un champ vectoriel et renvoie un champ vectoriel (il y a une flèche sur l'opérateur rotationnel).

On définit l'opérateur rotationnel à partir du théorème de Stokes.

Définition : Rotationnel - Théorème de Stokes

Soit $\vec{A}(M)$ un champ vectoriel. Il existe un unique champ vectoriel appelé rotationnel de $\vec{A}$ tel que, pour toute surface (S) s'appuyant sur un contour (Γ) **fermé** orientés ensemble par la **règle de la main droite (ou par la règle du tire-bouchon)**, la circulation de $\vec{A}$ sur (Γ) vaut :

$$\boxed{\oint_{(\Gamma)} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_{(S)} \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$



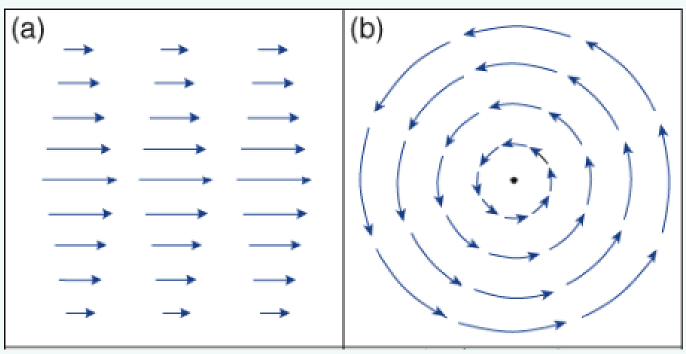
Expression en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes, le rotationnel s'exprime avec les dérivées partielles croisées :

$$\boxed{\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}(x,y,z) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u_z}}$$

Signification physique

Le rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{A}$ au point M peut être vue comme la densité volumique de circulation de $\vec{A}$ au point M. Il exprime la tendance qu'ont les lignes de champ d'un champ vectoriel à tourner autour d'un point : sa circulation locale sur un petit lacet entourant ce point est non nulle quand son rotationnel ne l'est pas.



A gauche et à droite, le rotationnel du champ de vecteurs dessiné est non nul.

On dit qu'un champ vectoriel $\vec{A}$ est à ***circulation conservative*** *si en tout point de l'espace :*

$$\boxed{\vec{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{0} \Leftrightarrow \oint_{(\Gamma)} \vec{A}\cdot \text{d}\vec{l} = 0}$$

*La circulation du champ $\vec{A}$ se compense alors sur les différents côtés du contour fermé : la circulation de $\vec{A}$ à travers un chemin quelconque est donc **constante**.*

4) Opérateur $\vec{B}\cdot\vec{\text{grad}}$

Cet opérateur, rencontré principalement en mécanique des fluides, s'applique à un champ scalaire ou vectoriel et renvoie un champ scalaire ou vectoriel.

Expression en coordonnées cartésiennes

- Pour un champ scalaire f, l'opérateur renvoie le champ scalaire :

$$(\vec{B}\cdot\vec{\text{grad}})f = B_x\frac{\partial f}{\partial x} + B_y\frac{\partial f}{\partial y} + B_z\frac{\partial f}{\partial z}$$

- Pour un champ vectoriel $\vec{A}$, l'opérateur renvoie le champ vectoriel :

$$(\vec{B}\cdot\vec{\text{grad}})\vec{A} = B_x\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + B_y\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + B_z\frac{\partial \vec{A}}{\partial z}$$

5) Opérateur $\vec{\nabla}$

En coordonnées cartésiennes uniquement, on définit l'opérateur $\vec{\nabla}$ tel que :

$$\boxed{\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}}$$

Cet opérateur permet d'écrire simplement en coordonnées cartésiennes l'action des opérateurs discutés précédemment :

- $\boxed{\vec{\text{grad}}f = \vec{\nabla}f}$
- $\boxed{\text{div}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}}$
- $\boxed{\vec{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}}$
- $(\vec{B}\cdot\vec{\text{grad}})\vec{A} = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$

ATTENTION : n'utilisez l'opérateur $\vec{\nabla}$ qu'en coordonnées cartésiennes. Dans les autres systèmes de coordonnées, les expressions des opérateurs gradient, divergence et rotationnel doivent vous être fournies.

II Opérateurs du second ordre

Pour obtenir des opérateurs du second ordre, il faut combiner des opérateurs du premier ordre. Le nombre de combinaisons est limité par la nature des opérateurs en question (*i.e.* s'ils s'appliquent à un vecteur ou à un scalaire et s'ils renvoient un vecteur ou un scalaire).

1) Application à un champ scalaire f

Parmi les opérateurs que nous avons défini, le seul qui s'applique à un champ scalaire est l'opérateur gradient. Celui-ci renvoie un champ vectoriel auquel on peut appliquer au choix l'opérateur divergence ou rotationnel.

Opérateur $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}} f)$

En coordonnées cartésiennes (mais ceci se généralise à tout système de coordonnées), nous pouvons montrer, avec les expressions données précédemment et le théorème de Schwartz pour permuter les dérivées partielles, que :

$$\boxed{\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}} f) = \vec{0}}$$

Réciproquement, si un champ vectoriel $\vec{A}$ vérifie $\vec{\mathrm{rot}}\vec{A} = \vec{0}$ alors il existe un champ scalaire f tel que : $\vec{A} = -\vec{\mathrm{grad}} f$ (le signe $-$ est choisi par convention).

Opérateur laplacien scalaire $\Delta f = \mathrm{div}\,(\vec{\mathrm{grad}} f)$

Définition : Laplacien scalaire

On définit le laplacien scalaire l'opérateur qui vérifie pour tout champ scalaire f :

$$\boxed{\Delta f = \mathrm{div}\,(\vec{\mathrm{grad}} f)}$$

Expression en coordonnées cartésiennes

Le laplacien scalaire en coordonnées cartésiennes vaut en utilisant la définition précédente :

$$\boxed{\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

2) Application à un champ vectoriel $\vec{A}$

Les possibilités d'application à un champ vectoriel sont : l'opérateur divergence et l'opérateur rotationnel.

- L'opérateur $\mathrm{div}\,\vec{A}$ est un scalaire et le seul opérateur connu du premier ordre qu'on puisse lui appliquer est donc le gradient pour former $\vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{A})$.
- L'opérateur $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ est un vecteur. On peut donc lui appliquer l'opérateur rotationnel ou l'opérateur divergence pour former respectivement $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\vec{A})$ ou $\mathrm{div}\,(\vec{\mathrm{rot}}\vec{A})$.

Opérateur $\mathrm{div}\,(\vec{\mathrm{rot}}\vec{A})$

En coordonnées cartésiennes (mais ceci se généralise à tout système de coordonnées), nous pouvons montrer, avec les expressions données précédemment et le théorème de Schwartz pour permuter les dérivées partielles, que :

$$\boxed{\operatorname{div}(\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{A}) = 0}$$

Réciproquement, si un champ vectoriel $\vec{B}$ vérifie $\operatorname{div}\vec{B} = \vec{0}$ alors il existe un champ vectoriel $\vec{B}$ tel que : $\vec{B} = \vec{\operatorname{rot}}\,\vec{A}$.

Opérateur laplacien vectoriel $\vec{\Delta}$

Définition : Laplacien vectoriel

En combinant les opérateurs vectoriels du second ordre non nuls obtenus plus haut, on définit le laplacien vectoriel l'opérateur qui vérifie pour tout champ vectoriel $\vec{A}$:

$$\boxed{\vec{\Delta}\vec{A} = \vec{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\vec{A}) - \vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{A})}$$

Expression en coordonnées cartésiennes

Le laplacien vectoriel en coordonnées cartésiennes vaut en utilisant la définition précédente :

$$\boxed{\vec{\Delta}\vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}}$$

Toujours en coodonnées cartésiennes, il s'écrit donc :

$$\boxed{\vec{\Delta}\vec{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}}$$