Mémo résolution d'équations différentielles en Physique(-Chimie)

En physique, les équations différentielles que l'on rencontre sont quasiment toutes du même type et il faut savoir retrouver leur solution rapidement.

I Équations différentielles linéaires du premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants avec second membre prend la forme suivante :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + Kf(t) = A(t)}$$

On suppose ici $K = \mathrm{cte}$ (sinon la solution générale s'obtient en trouvant une primitive de K), ce qui correspondra à la plupart des cas rencontrés en physique.

1) Équation homogène

Pour résoudre l'équation générale, on cherche d'abord une solution de l'équation homogène associée (en prenant donc le second membre égal à 0) :

$$\frac{\mathrm{d}f_h}{\mathrm{d}t} + Kf_h = 0$$

La solution de cette équation est :

$$\boxed{f_h(t) = C\exp(-Kt)}$$

avec C une[1] constante.

Par analyse dimensionnelle, la constante K a la dimension de l'inverse de la dimension de t et on peut introduire τ tel que $K = 1/\tau$. Attention, si ce n'est pas t qui intervient dans l'équation différentielle mais x, n'introduisez pas un temps caractéristique τ mais plutôt une longueur caractéristique.

2) Solution particulière

Suivant la nature du second membre de l'équation, on cherche la solution particulière sous différentes formes.

Second membre $= \mathrm{cte}$

Si le second membre A est une constante, on cherche la solution particulière sous forme d'une constante : $f_p = \mathrm{cte}$. On injecte cette solution dans l'équation initiale et on obtient :

$$f_p = A/K$$

1. Comme on considère une équation du premier ordre, il n'y a qu'une constante à déterminer.

Second membre $= A_0 \cos(\omega_0 t)$

Le deuxième cas de solution particulière que l'on sait résoudre en physique sera le cas d'un second membre prenant la forme d'une fonction sinusoïdale.

On utilise alors généralement la méthode des complexes : on introduit $\underline{f}_p(t)$ telle que $f_p(t) = \mathrm{Re}(\underline{f}_p(t))$ et on le cherche sous la forme : $\underline{f}_p(t) = \underline{F}\exp(\mathrm{j}\omega t)$. En injectant cette forme de solution dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\underline{f}_p(t) = \frac{A_0}{K + \mathrm{j}\omega}\exp(\mathrm{j}\omega_0 t)$$

C'est la **méthode** qui est à retenir et surtout pas le résultat.

3) Solution totale

La solution totale s'obtient en sommant la solution de l'équation homogène et l'équation particulière :

$$f(t) = f_h(t) + f_p(t)$$

et c'est à cette solution totale qu'il faut appliquer les conditions initiales pour trouver la constante C.

II Équations différentielles linéaires du second ordre

Une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants avec second membre prend la forme suivante :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + K_1 \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + K_2 f(t) = A(t)}$$

On suppose ici $K_1, K_2 = \mathrm{cte}$ (sinon la solution générale s'obtient en trouvant des primitives pour K_1 et K_2), ce qui correspondra à la plupart des cas rencontrés en physique.

On met souvent cette équation sous la forme :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 f(t) = A(t)}$$

avec ω_0 une pulsation propre et Q un facteur de qualité.

1) Équation homogène

On écrit l'équation caractéristique associée (en remplaçant les dérivées n^{e} par r^n) :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

On calcule ensuite le discriminant associé :

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left[\left(\frac{1}{Q}\right)^2 - 4\right]$$

On distingue les différents types de solutions suivant la valeur de Q.

$Q < \frac{1}{2}$: $\boxed{\Delta > 0}$

Les solutions de l'équation caractéristique sont réelles :

$$r_\pm = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

et les solutions de l'équation homogène sont sous forme d'exponentielle réelle (on peut aussi utiliser la base $\cosh/\sinh$) :

$$\boxed{f_h(t) = C\exp(r_+ t) + D\exp(r_- t)}$$

avec C, D deux[2] constantes.

Le régime est **apériodique** : facteur de qualité trop faible (ou facteur d'amortissement trop grand).

$Q > \frac{1}{2}$: $\boxed{\Delta < 0}$

Les solutions de l'équation caractéristique sont imaginaires :

$$r_\pm = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \mathrm{j}\sqrt{-\Delta}}{2}$$

et les solutions de l'équation homogène sont sous forme d'une fonction sinusoïdale amortie :

$$\boxed{f_h(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}\right)\left[C\cos\left(\sqrt{-\Delta}t/2\right) + D\sin\left(-\sqrt{\Delta}t/2\right)\right]}$$

avec C, D deux constantes.

Le régime est **pseudo-périodique** : facteur de qualité grand (ou facteur d'amortissement faible).

La limite $Q \to +\infty$ est intéressante. L'équation différentielle homogène devient :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 f(t) = 0}$$

La solution que l'on vient de donner dans la limite $Q \to +\infty$ s'écrit alors comme la somme de deux fonctions sinusoïdales :

$$f_h(t) = C\cos\left(\sqrt{-\Delta}t/2\right) + D\sin\left(-\sqrt{\Delta}t/2\right)$$

avec $\sqrt{-\Delta} = 2\omega_0$. On vérifie qu'on retrouve alors la solution d'une équation d'oscillateur harmonique :

$$\boxed{f_h(t) = C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t)}$$

2. Comme on considère une équation du second ordre, il y a deux constantes à déterminer.

$Q = \frac{1}{2}$: $\Delta = 0$

Cas limite peu rencontré en physique. La solution vaut alors :

$$f_h(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}\right)[C + Dt]$$

avec C, D deux constantes.

2) Solution particulière

Second membre $= \mathrm{cte}$

Pour $A = \mathrm{cte}$, on cherche une solution particulière constante et on obtient $f_p = \frac{A}{\omega_0^2}$.

Second membre $= A_0\cos(\omega_0 t)$

On cherche alors une solution particulière sinusoïdale avec la méthode des complexes : on introduit $\underline{f}_p(t)$ telle que $f_p(t) = \mathrm{Re}(\underline{f}_p(t))$ et on la cherche sous la forme : $\underline{f}_p(t) = \underline{F}\exp(\mathrm{j}\omega t)$. En injectant cette solution dans l'équation générale :

$$-\omega^2\underline{F} + \mathrm{j}\omega\frac{\omega_0}{Q}\underline{F} + \omega_0^2\underline{F} = A_0$$

Finalement, on a :

$$\underline{f}_p(t) = \frac{A_0}{-\omega^2 + \mathrm{j}\omega\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}\exp(\mathrm{j}\omega t)$$

C'est la **méthode** qui est à retenir et surtout pas le résultat.

3) Solution totale

La solution totale s'obtient en sommant la solution de l'équation homogène et l'équation particulière :

$$f(t) = f_h(t) + f_p(t)$$

et c'est à cette solution totale qu'il faut appliquer les conditions initiales pour trouver les constantes C et D.

III Et les équations différentielles non linéaires ?

En physique, on rencontre bien sûr parfois des équations non linéaires. Si elles sont du second ordre, nous ne saurons pas les résoudre. Par contre, pour des équations du premier ordre, nous saurons parfois les résoudre (cela dépendra de la non-linéarité). La méthode à retenir est celle de **séparation des variables**. On en donne un exemple pour un cas que l'on sait résoudre avec une non linéarité en puissance $n \neq 1$ [3] :

$$\frac{\mathrm{d}f\,(t)}{\mathrm{d}t} + K f^n = 0$$

avec K constant.

La méthode de séparation des variables consiste à passer tout ce qui dépend de f d'un côté et tout ce qui dépend de t de l'autre. On a alors :

$$\frac{\mathrm{d}f}{f^n} = -K\,\mathrm{d}t$$

En intégrant entre t_0 et t, on obtient :

$$\left[\frac{f^{-n+1}}{-n+1}\right]_{t_0}^{t} = -K\,[t]_{t_0}^{t}$$

D'où finalement :

$$\frac{1}{1-n}\left[f(t)^{-n+1} - f(t_0)^{-n+1}\right] = -K(t-t_0)$$

Encore une fois, c'est la **méthode** générale qui est à retenir et surtout pas le résultat.

3. Le cas $n = 1$ se ramène à la première section de ce mémo.