

## Épreuves orales de Physique

L'épreuve orale de physique dure 50 minutes et place le candidat face à un sujet qu'il découvre et qu'il n'a pas pu préparer. Une telle épreuve est toujours déstabilisante et le candidat peut compter a priori sur la bienveillance de l'examineur. L'épreuve se déroule sous forme d'un dialogue constructif entre le candidat et l'examineur, ce dernier prodiguant s'il y a lieu des remarques lorsque le candidat est bloqué dans la résolution, ou s'il s'oriente dans une mauvaise direction avec trop de persévérance. L'objectif de cette épreuve n'est pas uniquement de contrôler les connaissances du candidat, mais aussi de mettre à l'épreuve sa capacité de cerner un problème et de proposer une stratégie de résolution de façon plus ou moins autonome. Le candidat doit donc prendre des initiatives, l'examineur orientant la discussion suivant les réactions du candidat. Les tentatives de solution, même si elles n'aboutissent pas, permettent de voir si le programme a bien été assimilé pour pouvoir être utilisé et pas seulement récité sans recul. Il est conseillé d'exercer son intuition. Pour cela, tâtonner, faire une figure, estimer des ordres de grandeur sont des moyens utiles et recommandés. Par exemple, un objet réel n'est jamais « grand » ou « petit » : il faut discuter quels paramètres sont petits ou grands devant quels autres, pour ne garder in fine que ceux qui sont strictement nécessaires. On essaie alors de représenter le système réel par un modèle simple que l'on rattache au cours. Savoir ce que l'on peut faire avec les connaissances acquises et évaluer les efforts nécessaires pour arriver à une estimation des effets est aussi important que de souligner les phénomènes physiques à la base du problème. Enfin, après avoir compris qualitativement l'énoncé, il est temps de poser soi-même les équations, avant de les résoudre.

14 sujets d'oral de physique sont proposés en exemple. Ils sont accompagnés d'une partie intitulée « Indications sur la résolution », permettant de mettre les futurs lecteurs sur la voie de leur résolution.

## Étude simplifiée des marées

La Terre est assimilée à une sphère rigide, homogène (centre  $T$ , rayon  $R_T$ , masse  $M_T$ ) entièrement recouverte d'un océan d'épaisseur négligeable par rapport à  $R_T$ , constitué d'un liquide homogène, non visqueux, incompressible, de masse volumique  $\rho$ . La pression atmosphérique  $P_0$  est supposée constante et uniforme. On néglige les interactions gravitationnelles entre molécules du liquide dans tout le problème. On traitera la particule fluide comme un système mécanique fermé standard auquel s'appliquent les théorèmes généraux.

1. Trouver la forme de la surface de l'océan dans l'hypothèse où l'eau est au repos, la Terre immobile et seule dans l'espace.

2. Exprimer l'accélération de la pesanteur  $g$  à la surface de la Terre en fonction de  $G$ ,  $R_T$  et  $M_T$ . Par la suite on prend  $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$  dans tout le liquide.

3. On considère maintenant l'ensemble Terre-Lune supposé seul dans l'espace, la Lune  $L$  étant assimilée à une masse ponctuelle située à une distance  $D = TL$  du centre de la Terre. La Terre ne tourne pas sur elle-même. Reprendre l'étude précédente en mettant en évidence l'effet de termes supplémentaires dans l'accélération.

4. L'eau étant au repos trouver une relation vérifiée dans tout le liquide. En déduire une équation caractérisant la surface libre.

5. Soit  $s$  la variation de niveau de l'océan due à l'attraction lunaire.  $A$  dénotant la position d'une particule fluide, trouver une relation entre  $s$  et l'angle  $Z = (\overrightarrow{TA}), (\overrightarrow{TL})$  :

$$s = \frac{1}{2} \frac{M_L}{M_T} \frac{R_T^4}{D^3} (3 \cos^2 Z - 1) .$$

**Commentaires** : exercice à traiter dans le cadre de la mécanique du point et des systèmes. Aucune connaissance en mécanique des fluides n'est nécessaire. Le but de l'exercice est de tester la maîtrise du candidat dans les changements de référentiel et sa compréhension de la mécanique en référentiel non galiléen. La démonstration du terme de marées n'est pas exigée comme prérequis à l'exercice. Elle doit venir cours de sa résolution. Les compétences évaluées plus particulièrement avec cet exercice sont l'analyse des propriétés de potentiels à définir.

1. Le système considéré est une particule fluide (PF). Système fermé de masse volumique  $\rho$  et de volume élémentaire  $d\tau$ . Au sein de l'océan cette particule fluide est soumise à la résultante des forces de pression et à l'attraction gravitationnelle :  $\rho d\tau \vec{a} = \rho d\tau G \frac{M_T}{r^3} \vec{r} - \text{grad} P d\tau$ . Le liquide étant au repos  $\vec{a} = \vec{0}$ . On en déduit que la quantité  $V(r) = G \frac{\rho M_T}{r} - P$  est constante dans le liquide. A la surface du liquide :  $P = P_0$  d'où  $G \frac{\rho M_T}{r} - P_0 = \text{cte} \Rightarrow r = \text{cte}$ . La surface des océans est sphérique avec ces hypothèses.

2. En l'absence de mouvement de  $T$  :  $\vec{g} = -G \frac{M_T}{r^3} \vec{r}$ .

3. L'accélération d'entraînement se ramène à l'accélération du centre de masse de  $T$  dans le référentiel de Copernic supposé galiléen. On pose  $\vec{D} = \vec{TL}$  et l'on a dans le référentiel terrestre, non galiléen cette fois, pour la P.F. située en A :

$$\rho d\tau \vec{a} = -\rho d\tau G \frac{M_T}{r^3} \vec{r} - \overrightarrow{\text{grad}} P d\tau - \rho d\tau G \left( \frac{M_L}{LA^3} \vec{LA} - \frac{M_L}{LT^3} \vec{LT} \right).$$

4. Au 1<sup>er</sup> ordre :

$$\vec{a}_{\text{marées}} = \frac{GM_L}{D^3} \left( 3 \frac{r}{D} \cos Z \vec{D} - \vec{r} \right) = g \frac{M_L}{M_T} \frac{R_T^2}{D^5} (3 \vec{D} (\vec{D} \cdot \vec{r}) - \vec{r} D^2) = -\overrightarrow{\text{grad}} W.$$

Au repos, la surface du liquide est définie par  $\vec{a} = \vec{0}$  et  $P = P_0$  soit :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{GM_T}{r} - \frac{P}{\rho} - W \right) = \vec{0} \Rightarrow \frac{GM_T}{r} - \frac{P}{\rho} + g \frac{M_L}{M_T} \frac{R_T^2}{2D^3} (3 \cos^2 Z - 1) = \text{cte}.$$

En développant au 1<sup>er</sup> ordre en  $s$  défini par :  $r = R_T + s$ , avec  $s \ll R_T$ , on trouve :

$$s = \text{cte} + g \frac{M_L}{M_T} \frac{R_T^4}{2D^3} (3 \cos^2 Z - 1).$$

On démontre que la constante est nulle en écrivant que le volume d'eau est constant, quelle que soit la forme de la surface de l'océan.

## Diffraction par un objet de phase

Une pupille diffractante circulaire de centre  $O$  et de rayon  $R$  est caractérisée par un facteur de transparence en amplitude :  $t(x, y) = \exp \left[ jk \frac{x^2 + y^2}{a} \right]$  avec  $a > 0$ .  $x$  et  $y$  sont les coordonnées dans le plan diffractant.

L'onde incidente se propage dans le sens des  $z$  croissants.

1. Elle est éclairée, en incidence normale, par une onde plane monochromatique (longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$ ). Déterminer l'intensité en un point  $P$  de l'axe tel que  $OP = D' > 0$ . On supposera que  $R \ll D'$ ,  $R \ll a$  et  $a\lambda \ll R^2$ .

2. Reprendre la question précédente pour une source monochromatique  $S$  située sur l'axe  $z'Oz$  à distance finie du point  $O$ . On notera  $D = \overrightarrow{SO} > 0$  avec  $D \gg R$ . Conclure.

**Commentaires** : exercice de diffraction qui teste la compréhension fine du théorème de Huygens-Fresnel et de ses conditions d'application. L'objet de phase étudié ici n'est autre qu'une lentille convergente. Une discussion autour du rôle de la diffraction en optique géométrique est bienvenue. Les résultats doivent être discutés à partir de courbe soignées et légendées.

1. L'application du principe de HF, dont l'énoncé est discuté avec le candidat, conduit à l'écriture suivante de l'amplitude du signal lumineux reçu au point  $P$  :

$$\underline{a}(P) = K \int_{\text{pupille}} t(M) \underline{a}_i(M) \frac{e^{-ikMP}}{MP} dS_M .$$

En développant la distance  $MP$  au 1<sup>er</sup> ordre e $OM = r$  ( $\ll OP = D'$ ), avec  $O$  un point origine au sein de la pupille, on trouve une expression exploitable mathématiquement :

$$\underline{a}(P) \simeq \frac{K}{D'} e^{-ikD'} \underline{a}_i \int_{\text{pupille}} t(M) e^{-ik \frac{r^2}{2D'}} dS_M .$$

Le calcul complet de l'intensité conduit à l'expression suivante :

$$I(P) \simeq K' \sin^2 \left( \frac{\pi R^2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{2D'} \right) \right) .$$

Cette fonction a un maximum défini en  $D' = a/2$ . La largeur relative de la tache centrale autour de ce point, proportionnelle à  $a\lambda/R^2$ , est faible par rapport à l'unité dans les conditions de l'unité.

2. Lorsqu'on déplace la source ponctuelle, on joue sur l'amplitude incidente au point courant  $M$  de la pupille. Donc :  $\underline{a}_i(M) \sim \frac{e^{-ikS_0M}}{S_0M}$  avec  $S_0M \sim D + \frac{r^2}{2D}$ . Le résultat précédent est donc simplement modifié en :

$$I(P) \simeq K' \sin^2 \left( \frac{\pi R^2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{2D'} - \frac{1}{2D} \right) \right) .$$

La tache centrale est décalée au point de coordonnée :  $D' = \frac{aD}{2D - a}$ .

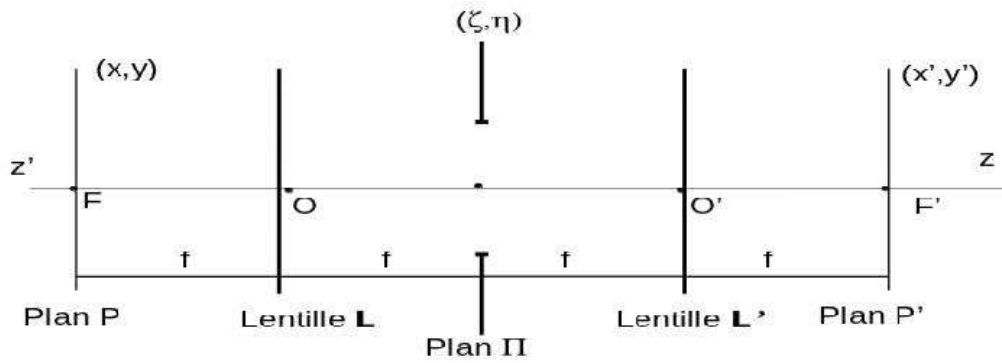
Retrouver le cas 1. en faisant tendre  $D$  vers l'infini.

Finalement cette pupille se comporte comme une lentille convergente, de distance focale  $d = a/2$ , qui conjugue en 2. les points  $S_0$  et  $P$ .

Le facteur de transparence de cette pupille, affectant la phase de l'onde incidente lui vaut le titre d'objet de phase.

## Tache de diffraction à symétrie cylindrique

Deux objectifs  $O$  et  $O'$ , de même focale  $f$  et supposés parfaits, sont disposés en configuration «  $4f$  » comme l'indique la Figure suivante. L'ensemble est éclairé par une source ponctuelle  $S$  de lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  placée sur l'axe des deux objectifs. Dans le plan  $\pi$  on place un diaphragme percé d'une ouverture circulaire de rayon  $R$ .



1. Calculer les distributions d'amplitude et d'intensité dans le plan  $P'$  en choisissant judicieusement les coordonnées dans les plans  $\pi$  et  $P'$ . On rappelle que :

$$\int_0^{2\pi} \exp[\pm i\Phi \cos \theta] d\theta = 2\pi J_0(\Phi)$$

et

$$\int_0^z J_0(\Phi) \Phi d\Phi = Z J_1(Z)$$

où  $J_n$  désigne la fonction de Bessel d'ordre  $n$ .

2. La fonction  $J_1(Z)$  est une fonction oscillante dont le premier zéro est obtenu pour  $Z = 3,83$  et qui est équivalente à  $Z/2$  quand  $Z$  tend vers 0. Calculer le rayon angulaire du premier anneau noir de la figure de diffraction et représenter la répartition d'intensité dans le plan  $P'$ . On donne  $R = 3$  cm,  $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$ . Qu'observe-t-on dans  $P'$  si  $R$  tend vers l'infini ?

3. Comment est modifiée l'expression de la distribution d'amplitude dans le plan  $P'$  si la source ponctuelle  $S$  est déplacée au point de coordonnées  $(x_0, y_0)$ .

4. L'objectif  $O$  est éclairé simultanément par deux sources ponctuelles  $S$  et  $S_1$  latéralement décalées de  $1 \mu\text{m}$ . Calculer la valeur de  $R$  pour laquelle on peut juste observer deux taches de diffraction dans le plan  $P'$ . Discuter le(s) critère(s) d'observation appliqué(s). On prendra  $f = 20$  cm.

**Commentaires :** cet exercice de diffraction teste la représentation spatiale d'un problème en optique. Les intégrales de Bessel ne nécessitent aucune connaissance ni aucune compétence technique particulière. Elles sont données pour à titre indicatif pour voir comment le candidat exploite un résultat donné et en tire le maximum.

1. On calcule l'amplitude et l'intensité du signal lumineux au point  $M'$  de coordonnées angulaires  $x'/f$  et  $y'/f$ . Dans le montage  $4f$  considéré, la diffraction peut être envisagée à l'approximation de Fraunhofer.

En se plaçant en coordonnées polaires dans les plans  $\pi$  et  $\pi'$  on peut écrire l'amplitude diffractée :

$$a(r', \theta') = a_0 \int_{\text{pupille}} e^{\frac{2i\pi}{\lambda f} r r' \cos(\theta' - \theta)} r dr d\theta .$$

En exploitant la symétrie de révolution cylindrique, on simplifie l'expression précédente en :

$$a(r') = 2\pi a_0 \int_{\text{pupille}} J_0 \left( \frac{2\pi}{\lambda f} r r' \right) r dr .$$

Finalement l'intensité au point  $M'$  s'écrit :

$$I \left( u' = \frac{r'}{f} \right) = (\pi R^2)^2 \frac{2J_1 \left( \frac{2\pi}{\lambda f} R u' \right)}{\frac{2\pi}{\lambda} R u'}$$

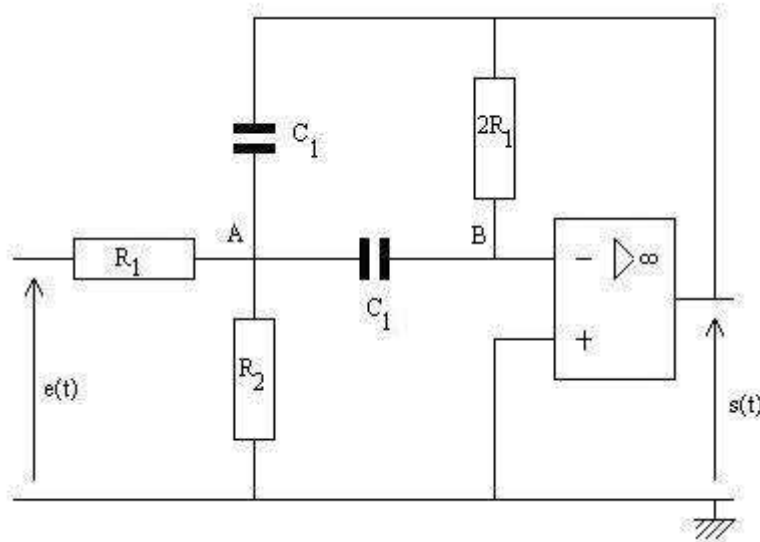
2.  $u'_m = \frac{3,83\lambda}{2\pi R} = 1,210^{-5}$  rad. Lorsque le rayon s'agrandit la figure se réduit au point  $S'$ , image de  $S$ .

3. On décale la figure précédente au point de coordonnées  $(-x_0, -y_0)$ , image géométrique de  $S_0$ .

4. On superpose les figures en intensité. Pour que les taches commencent à être bien séparées il faut que le maximum de la seconde tache coïncide avec le minimum nul de la première figure de diffraction. Discussion sur les critères d'observation de type Rayleigh.

### Filtre passe-bande actif

On étudie le montage ci-dessous dans lequel l'AO est supposé idéal.



1. Calculer la fonction de transfert  $\underline{T}(\omega)$  .

2. Définir et identifier  $Q$  et  $\omega_0$  en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $C_1$ . Calculer la valeur numérique de  $Q$  et de  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ .

3. Étudier les variations du gain.

4. On met en entrée de ce circuit une fonction créneau  $e(t)$  positive de fréquence  $f = \frac{1}{T} = 3,0$  kHz et de valeur maximale  $E = 10$  V. Tracer l'allure du signal de sortie  $s(t)$  si le circuit est réglé pour  $f_0 = 3,0$  kHz et  $Q = 20$ .

**Commentaires :** l'exercice teste l'application du théorème de Millmann dans des circuits avec A.O. L'erreur classique, souvent observée, consiste à appliquer le théorème en sortie d'A.O. qui est une source de courant. Dans le cas présent il est important de bien dénombrer les quantités à déterminer avant de se lancer dans le calcul trop rapidement.

1. On applique le théorème de Millmann aux points  $A$  et  $B$ . On obtient des relations suivantes entre les variables et paramètres du problème :

$$V_A = \frac{\frac{e}{R_1} + \frac{s}{Z_{C1}} + \frac{V_B}{Z_{C1}}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{Z_{C1}} + \frac{1}{Z_{C1}} + \frac{1}{R_2}} \quad \text{et} \quad V_B = 0 = \frac{\frac{s}{2R_1} + \frac{V_A}{Z_{C1}}}{\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{Z_{C1}}}.$$

D'où la fonction de transfert :  $T(j\omega) = \frac{-1}{1 + j\left(R_1 C_1 \omega - \frac{1}{R_e C_1 \omega}\right)}$  avec  $R_e = \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ .

2. L'écriture sous forme canonique de cette fonction de transfert conduit à identifier directement le facteur de qualité et la pulsation caractéristique de ce circuit :  $Q = \sqrt{\frac{R_1}{R_e}}$

et  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_e R_1 C_1}}$ .

3. Ce circuit est un filtre passe-bande de bande-passante :  $\Delta\omega = \frac{\Omega_0}{Q}$ .

4. Il est facile de déterminer le spectre du signal d'entrée. Les coefficients de la série de Fourier s'écrivent :  $c_{p+1} = \frac{2E}{(2p+1)\pi}$  avec  $p \in \mathbb{N}$ . Le fondamental vaut :  $c_0 = \frac{E}{2}$ .

Le circuit étant accordé sur une fréquence de 3 kHz avec une bande-passante de 0,67 kHz, il ne reste que la première harmonique. Le signal en sortie est donc purement sinusoïdal et s'exprime :  $s(t) = \frac{2E}{\pi} \sin(2\pi ft)$ , où  $f = 3$  kHz.

## Détente de Joule & Gay-Lussac pour un gaz réel

1. Décrire la détente de Joule et Gay Lussac. Faire un schéma. Préciser les caractéristiques de cette détente si on l'effectue entre un état initial de volume  $V_1$  et un état final de volume  $V_2 = 2V_1$ .

2. On considère un gaz de Van der Waals dont l'équation d'état et l'énergie interne ont pour expression :  $\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$  et  $U(T, V) = nC_{vm}T - \frac{n^2 a}{V}$ . Justifier.

3. Exprimer la variation de température du gaz dans la détente de Joule et Gay Lussac du volume  $V_1$  au volume  $V_2 = 2V_1$ .

**Commentaires** : exercice proche du cours de thermodynamique. Aucune connaissance n'est exigée sur le gaz réel. Il est attendu du candidat une extrapolation critique et argumentée à partir du modèle du gaz parfait. L'application des deux premiers principes est standard mais doit être exécutée de manière justifiée.

1. Cours : détente adiabatique irréversible s'effectuant à énergie interne constante. Le candidat est libre de redémontrer (rapidement) ce résultat puis de déterminer l'état final. S'il n'en prend pas l'initiative l'examinateur lui demandera de calculer la variation d'entropie entre l'état initial et l'état final :  $\Delta S = nR \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) = nR \ln 2 > 0$ .

2. Les termes correctifs du modèle sont :

– la pression interne  $n^2 \frac{a}{V^2}$  : effet des forces attractives de Van der Waals qui diminuent l'efficacité du transfert de quantité de mouvement du gaz aux parois, ce qui implique nécessairement qu'à température équivalente la pression d'un gaz réel est inférieure à celle d'un gaz parfait) ;

– le co-volume  $b$  qui rend compte de l'existence d'une structure pour les molécules d'un gaz réel.

L'expression de l'énergie interne rend compte du fait que ce gaz ne suit pas la première loi de Joule :  $U(T, V)$ .

3. Le calcul est immédiat par application du premier principe :  $\Delta U = 0 \Rightarrow nC_V \Delta T = n^2 a \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) \neq 0$ . Dans les conditions de l'expérience on prévoit une diminution de la température.

Le calcul de la variation d'entropie conduit, par utilisation de l'identité thermodynamique à l'expression suivante :

$$\Delta S = nC_V \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) + nR \ln \left( \frac{V_2 - nb}{V_1 - nb} \right) .$$

Le candidat est invité à commenter cette dernière expression en lien avec le second principe.

Cet exercice peut être étendu de multiples manières, par exemple en étudiant le même gaz dans une détente de Joule-Kelvin ou tout autre type de transformation simple, en demandant la démonstration de l'expression de l'énergie interne etc.

## Cycle de Stirling réel

On considère une machine comprenant un cylindre, un piston de déplacement  $P_d$ , un piston de travail  $P_t$ , ainsi qu'un accumulateur d'énergie  $A$  et enfermant une masse donnée constante d'un gaz actif en l'occurrence ici de l'air.



Le cycle de Stirling est modélisé suivant les quatre évolutions théoriques :

– Compression isotherme de (1) à (2) à la température  $T_f$  de la source froide par la montée du piston de travail  $P_t$  du volume  $V_1$  jusqu'au volume  $V_2$ .

– Chauffage isochore de (2) à (3) jusqu'à la température  $T_c$  de la source chaude par la descente du piston de déplacement qui envoie le gaz à travers l'accumulateur  $A$ .

– Détente isotherme à  $T_c$  de (3) à (4) jusqu'au volume initial  $V_1$  par la descente des deux pistons.

– Refroidissement isochore de (4) à (1) jusqu'à la température  $T_f$  par la remontée du piston de déplacement seul, forçant le gaz à traverser une nouvelle fois l'accumulateur, cette fois de haut en bas et en cédant de la chaleur.

1. Définir et exprimer le rendement du cycle de Stirling idéal.

2. Le gaz cède à l'accumulateur  $A$  la chaleur  $q_E = -q_{4-1}$  lors du refroidissement isochore. L'accumulateur fonctionnant avec une efficacité  $\alpha$  réduite ( $\alpha < 1$ ), seule une partie  $\alpha q_E$  est redonnée au gaz lors de l'échauffement isochore 2-3, de sorte que la source chaude doit apporter au gaz le complément de chaleur  $(1 - \alpha)q_E$ . L'aire du cycle n'est pas modifiée par cet échange de chaleur incomplet. Exprimer le rendement réel  $\eta_{\text{réel}}$  du cycle à échangeur imparfait. Le comparer au rendement théorique du cycle de Carnot.

**Commentaires** : étude d'une machine thermique effectuant des cycles de Stirling parfaits ou non. Il est indispensable d'être particulièrement rigoureux dans la gestion de la progression de l'exercice pour pouvoir extraire les résultats les plus pertinents.

1. Dans un diagramme entropique  $(T, S)$  les transformations isochores sont des branches d'exponentielle, les isothermes des segments horizontaux.

On détermine simplement que :  $s_4 - s_1 = c_v \ln \left( \frac{T_4}{T_1} \right) = c_v \ln \left( \frac{T_c}{T_f} \right) = s_3 - s_2$ . On en déduit que l'aire du cycle de Stirling idéal dans le diagramme entropique est égale à celle du cycle de Carnot (deux isentropiques, deux isothermes) dans ce même diagramme.

On peut donc éviter un calcul détaillé et exploiter directement ce résultat pour trouver finalement :  $\eta = 1 - \left( \frac{T_f}{T_c} \right)$ .

2. La détermination du rendement du cycle réel  $\eta_{\text{réel}} = \frac{-W}{Q_c}$ , rapport du travail fourni par la machine sur la quantité de chaleur à lui fournir, nécessite un calcul plus détaillé pour intégrer notamment les termes de pertes.

L'aire du cycle restant inchangée, le travail fourni n'est pas modifié.

Le calcul de  $Q_c$  est le suivant :  $Q_c = RT_C \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right) + (1 - \alpha)q_E$  où  $q_E = -q_{4 \rightarrow 1} = c_V(T_c - T_f)$ .

D'où l'expression finale du rendement :

$$\eta_{\text{réel}} = RT_C \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right) \left[ 1 + \frac{(1 - \alpha)c_V \left( 1 - \left( \frac{T_f}{T_c} \right) \right)}{R \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right)} \right].$$

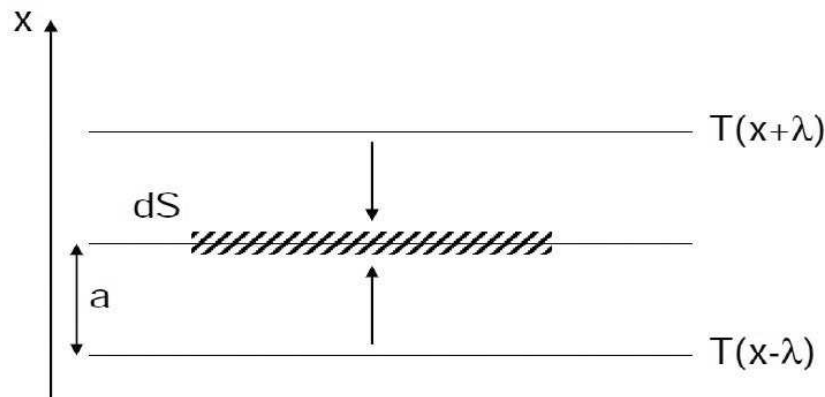
En posant  $a = \frac{V_1}{V_2}$  le rapport de compression, on obtient l'expression suivante du rendement réel :  $\eta_{\text{réel}} = \eta_{\text{idéal}} \left[ \frac{1}{1 + \frac{(1-\alpha)c_V \eta_{\text{idéal}}}{R \ln(a)}} \right]$ .

En remarquant que  $c_V = \frac{R}{\gamma - 1}$ , on voit qu'on a intérêt à travailler avec des gaz monoatomiques.

### Modèle microscopique de diffusion thermique

On considère un gaz de masse molaire  $M$  caractérisé par une densité  $n$  de particules assimilées à des sphères dures de rayon  $r$ . Les vitesses des particules ont toutes le même module  $v$ .

1. Définir et calculer le libre parcours moyen  $\lambda$  en introduisant la vitesse relative de deux particules.
2. Préciser l'ordre de grandeur de  $\lambda$  dans les conditions ordinaires de température et de pression.
3. On adopte un modèle unidimensionnel (selon un axe  $Ox$  par exemple) et on considère la configuration suivante.



Calculer le flux moyen de particules traversant l'unité de surface à la cote  $x$  pendant l'unité de temps dans un sens donné en fonction de  $n$  et de  $v$ .

4. Calculer dans le cadre de modèle la conductivité thermique  $K$  en fonction de  $n, \lambda, v, c_v$  capacité thermique molaire et  $N_A$ .

5. Calculer l'ordre de grandeur de  $K$  dans le cas de l'hélium dans les conditions ordinaires de température et de pression ( $r = 10^{-10}$  m et  $M_{He} = 4.10^{-3}$  kg.mol<sup>-1</sup>). Comparer à la valeur expérimentale 0.14 W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>.

**Commentaires** : cet exercice propose une modélisation microscopique des phénomènes de conduction thermique. Il teste la capacité d'initiatives du candidat à partir de paramètres relativement intuitifs, mais pas forcément rencontrés dans l'année comme la notion de libre parcours moyen. La définition est donnée si la candidat ne parvient pas à dégager une vision simple et cohérente. Il est en revanche demandé de bien maîtriser les résultats du cours sur la conduction, puisqu'un examen critique des résultats, en lien avec le cours, est nécessaire tout au long de la planche.

1. Libre parcours moyen (lpm =  $\lambda$ ) est la distance moyenne parcourue par une particule du système entre deux chocs successifs (cf modèle du gaz réel).

Si l'on considère que la densité particulaire vaut  $n$ , on peut dénombrer simplement le nombre de particules qu'une particule témoin du système va rencontrer pendant l'intervalle de temps  $dt$ , en supposant que  $v_r$ , la vitesse relative aux autres particules est en moyenne toujours la même :  $dN = (4\pi r^2) \times n \times (v_r dt)$ . Ceci implique un nombre de collisions par unité de temps égal à :  $N_{\text{coll}} = (4\pi r^2) \times n \times v_r$ .

On peut se contenter de prendre  $v_r \propto v$ , ou démontrer simplement que les valeurs moyennes satisfont la relation :  $v_r = \sqrt{2}v$ . D'autre part on introduira la section efficace de choc :  $\sigma = (4\pi r^2)$ .

Au final la définition du lpm nous conduit à écrire la relation suivante :  $N_{\text{coll}} = \frac{v}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}$ .

2. Pour un GP on aurait :  $\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\sigma P}$ , où l'on a introduit la constante de Boltzmann. Numériquement on trouve  $\lambda \sim 250$  nm.

3. Le flux dans une direction et un sens donné vaut :  $n \frac{v}{6}$ .

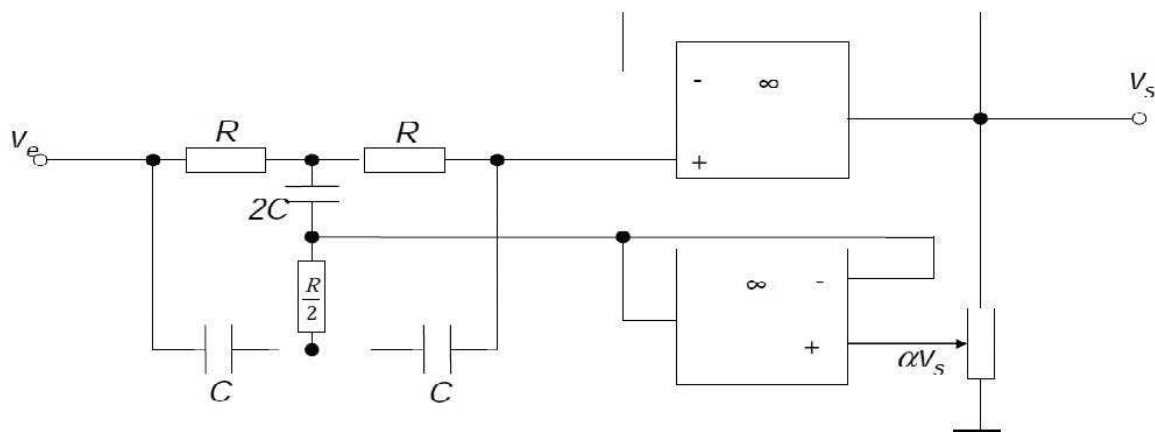
4. On considère que chaque particule porte avec elle une quantité d'énergie correspondant à son énergie interne,  $U = c_v T$ , où la température est celle du lieu où la particule a été émise. Ainsi à travers la surface horizontale de l'énoncé on a un flux de chaleur :  $j_{Q_x} = n \frac{v}{6} (c_v T(x - \lambda) - c_v T(x + \lambda))$ . En considérant que le lpm est faible par rapport aux dimensions du problème, on effectue un  $DL$  au premier ordre et on retrouve une loi analogue à Fourier, ce qui permet d'identifier le coefficient de conduction thermique :  $j_{Q_x} \sim n \frac{v}{6} \left( -2c_v \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Rightarrow K = n \frac{v}{3} c_v \lambda = n v k_B \frac{\lambda}{2}$ .

5. La vitesse quadratique moyenne se calcule dans le cadre de la théorie cinétique des gaz et le résultat (donné et discuté avec le candidat) est :  $v = \sqrt{\frac{3m}{k_B T}}$ .

Numériquement cela conduit au résultat suivant pour la conductivité thermique :  $K = 0,05 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . Compte-tenu de la simplicité du modèle, l'ordre de grandeur est plutôt satisfaisant.

### Filtre passe-bande composé

On considère le circuit suivant :



1. Calculer la transmittance du circuit en fonction de  $\alpha$  et de  $x = \omega/\omega_0$  avec  $\omega_0 = 1/RC$ .

2. Définir et exprimer le coefficient de qualité  $Q_0$  en fonction de  $\alpha$  et calculer les limites de la bande de fréquences rejetées à  $-3 \text{ dB}$  du gain maximal.

3. Vérifier que les fréquences limites sont données à mieux que 1% par la relation linéaire :  $x = 1 \pm 2(1 - \alpha)$  si  $Q_0 \geq 4$ .

4. Pour étaler le déplacement du curseur,  $\alpha$  est lié à la position  $y$  du curseur par la loi :  $\alpha = \log[5(1 + y)]$ . Quelles sont les valeurs de  $Q_0$  et des fréquences limites quand  $y$  varie de 0 à 0,995 ?

**Commentaires** : il est primordial de soigner l'utilisation des théorèmes généraux de l'électrocinétique, en particulier de bien dénombrer les inconnues et les systèmes d'équations que l'on peut obtenir.

1. On applique Millmann aux nœuds  $A$  (entrée + de l'AO supérieur, sachant que  $v_A = v_S$ ),  $B$  (nœud  $R - R - 2C$ ) puis  $E$  (nœud  $C - C - R/2$ ). On introduira également le nœud  $D$  entre  $2C - R/2$ -entrée - de l'AO inférieur. On obtient le système d'équations

suisant :

$$\begin{aligned}v_B &= f(v_e, v_D, v_A) , \\v_E &= g(v_e, v_A, v_D) , \\v_A &= h(v_B, v_E) .\end{aligned}$$

On détermine la fonction de transfert en éliminant les potentiels intermédiaires :

$$T(j\omega) = \frac{1 - \omega_0^2/\omega^2}{(1 - \omega_0^2/\omega^2) + 4(1 - \alpha)j\omega_0/\omega}.$$

2. La mise sous forme canonique de la fonction de transfert permet d'identifier le facteur de qualité :  $Q_0 = \frac{1}{4(1 - \alpha)} \Rightarrow \alpha = 1 - \frac{1}{4Q_0}$ .

Les fréquences limites de la bande-passante sont données par  $|T(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^2 = 1 + \frac{1}{2Q_0^2} \pm \frac{1}{Q_0} \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_0^2}}$ .

3. Dans la limite où le facteur de qualité est grand, on simplifie la relation précédente en :  $x^2 \sim 1 \pm \frac{1}{Q_0} \Rightarrow x \sim x = 1 \pm 2(1 - \alpha)$ .

4. Numériquement, pour  $y = 0$  on trouve  $Q_0 = 0,83$ . Pour  $y = 0,995$  on trouve  $Q_0 = 250$ . Dans ce dernier cas la *BP* est de l'ordre de 4‰.

## Oscillateurs couplés

On considère deux pendules de masse  $m_1$  et  $m_2$  de longueur  $l$  distants de  $a_0$ . Ils sont reliés par un ressort de longueur à vide  $a_0$ , de raideur  $k$  et de masse négligeable.

Trouver les équations des petits mouvements.

Donner la forme générale des solutions.

**Commentaires** : mise en œuvre des oscillations couplées. On insistera sur la mise en évidence des modes propres. Il est important que le candidat prenne les initiatives dans la mise en œuvre du calcul et les approximations (ressort intermédiaire horizontal par exemple).

On suppose que les angles que font les pendules pesants avec la verticale ( $\theta_1, \theta_2$ ) sont faibles. Ceci implique en particulier que le ressort intermédiaire reste proche de l'horizontale. Chaque masselotte est soumise à l'action de son poids, de la tension du fil et de la force de rappel du ressort.

En remarquant que la distance séparant les points d'attache des fils est égale à la longueur à vide du ressort on peut projeter directement le PFD appliqué à chaque mas-

selotte :

$$\begin{aligned} m_1 l \ddot{\theta}_1 &= -m_1 g \theta_1 + kl(\theta_2 - \theta_1) \\ m_2 l \ddot{\theta}_2 &= -m_2 g \theta_1 - kl(\theta_2 - \theta_1) . \end{aligned}$$

On définit les pulsations réduites :  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ ,  $\omega_1^2 = \frac{k}{m_1}$ ,  $\omega_2^2 = \frac{k}{m_2}$ .

La recherche de modes propres solution fait intervenir le déterminant du système d'équations couplées :

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - (\omega_0^2 + \omega_1^2) & -\omega_1^2 \\ \omega_2^2 & -\omega^2 - (\omega_0^2 + \omega_2^2) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 \quad \text{ou} \quad \omega^2 = \omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 .$$

La solution générale pour le couple d'angle  $(\theta_1, \theta_2)$  est une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales de pulsations  $\omega^2 = \omega_0^2$  et  $\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2$ .

### Petits mouvements d'un cerceau lesté

On considère un cerceau de centre  $C$ , de rayon  $R$  et de masse  $M$  uniformément répartie sur la circonférence.

On dispose un lest, de masse  $m$ , au point  $A$ , à la distance  $a = AC$  du centre. Les deux axes diamétraux assurent juste le maintien de l'ensemble. A l'instant initial le point de contact  $I$  est en  $O$ , origine du repère.

1. On suppose que le cerceau roule sans glisser. Quelle est l'équation des petits mouvements ?

2. On incline le support d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Reprendre l'étude précédente.

**Commentaires** : exercice de mécanique des systèmes couplés. La condition de roulement sans glissement réduit le nombre de paramètres du problème. Une approche énergétique est recommandée même si le candidat est invité à prendre toute initiative qui lui paraît pertinente.

1. La conservation de l'énergie mécanique au système {cerceau+lest} s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m v_A^2 + mg(R - a \cos \theta) = \text{cet} .$$

L'angle  $\theta$  est l'angle que fait le rayon lesté avec la verticale, dans le sens trigonométrique. On supposera qu'à l'instant initial les points  $C$ ,  $A$  et  $I$  sont alignés avec la verticale et que le point  $I$  coïncide avec le point  $O$ .

Les vecteurs vitesse des points  $C$  et  $A$  sont donnés, compte-tenu des conventions adoptées et de l'hypothèse de roulement sans glissement, par les relations suivantes :  $\vec{v}_C = (-R\dot{\theta}, 0, 0)$  et  $\vec{v}_A = (-R\dot{\theta} + a\dot{\theta} \cos \theta, a\dot{\theta} \sin \theta, 0)$ .

Le moment d'inertie du cerceau (on discute avec le candidat la notion de moment d'inertie, mais l'expression exacte n'est pas exigible) vaut :  $J = M R^2$ .

En dérivant l'intégrale première du mouvement par rapport au temps on obtient l'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} \left( 2M R^2 + m(R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta) \right) + \dot{\theta}^2 m a R \sin \theta + m g a \sin \theta = 0 .$$

A l'approximation des petits mouvements l'équation précédente se simplifie en une équation harmonique :

$$\ddot{\theta} \left( 2M R^2 + m(R - a)^2 \right) + m g a \theta = 0 .$$

Si  $a = R$  on retrouve la pulsation propre attendue :  $\omega^2 = \frac{m g}{2M R}$ .

2. En inclinant le support on change juste le terme d'énergie potentielle de pesanteur en ajoutant un terme dépendant de l'angle d'inclinaison du support.

### Oscillateur magnétique

Une particule chargée (masse  $m$ , charge  $q$ ) est placée à l'extrémité  $M$  d'une tige  $AM$  de masse négligeable et de longueur  $l$ .

L'articulation en  $A$  est parfaite et le système est plongé dans un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ .

A l'équilibre  $M$  est en  $O$  et on ne s'intéresse qu'aux petits mouvements autour de  $O$ . Étudier le mouvement de la charge partant, sans vitesse initiale, de la position :  $y(0) = 0$  et  $x(0) = a$ .

**Commentaires** : exercice classique de mouvement d'une particule dans un champ électromagnétique. La particule étant liée à une barre rigide, il faut tenir compte des contraintes. Une approche progressive, d'abord sans champ magnétique puis en augmentant "adiabatiquement" l'intensité du champ peut être pertinente. Elle est laissée à l'initiative du candidat ou suggérée si ce dernier ne l'envisage pas du tout.

Dans le cas où le champ magnétique est nul, à l'approximation des petits mouvements, le mobile va exécuter des petites oscillations autour de la position verticale (d'équilibre stable). En désignant par  $T$  la force exercée par la tige sur la particule, on détermine au premier ordre :  $T = m g$ .

Dans le plan horizontal  $Oxy$ , l'équation du mouvement est donc :  $m \vec{a} = \frac{-m g}{l} \overrightarrow{OH}$ , où  $H$  est la projection du point  $M$  sur le plan horizontal. Le système se ramène donc à un  $OH$  à deux dimensions. Le mouvement le plus général est donc une ellipse dans le plan horizontal.

En présence du champ magnétique vertical, il n'y a pas de modification selon l'axe

vertical du fait de la force de Lorentz.

Dans le plan horizontal, le système d'équations couplées que l'on obtient est le suivant :

$$\begin{aligned} T &= mg \\ m\ddot{x} &= \frac{-mg}{l}x + qB_0\dot{y} \\ m\ddot{y} &= \frac{-mg}{l}y + qB_0\dot{x}. \end{aligned}$$

La résolution peut se faire par exemple en passant par la variable complexe auxiliaire :  $Z = x + iy$ , solution de  $\ddot{Z} - 2i\omega_L\dot{Z} + \omega_0^2Z = 0$ , en utilisant les notations de l'énoncé.

En tenant compte des conditions initiales, on détermine complètement la fonction  $Z(t) = e^{i\omega_L t} a \left( \cos \omega t - i \frac{\omega_L}{\omega} \sin \omega t \right)$ . La pulsation réduite introduite dans l'expression précédente vaut :  $\omega = \sqrt{\omega_L^2 + \omega_0^2}$ .

Le mouvement total est donc la composition d'un mouvement elliptique centré en  $O$  de pulsation  $\omega$  et d'un mouvement circulaire de pulsation  $\omega_L$ .

Initialement, la particule se dirige vers le centre  $O$ , puis elle est déviée par l'action du champ, jusqu'à atteindre un point de rebroussement d'où elle repart, sans vitesse, en direction du centre  $O$  etc.

## Particule dans un champ électro-magnétique

Une particule de charge  $q > 0$  et de masse  $m$  est soumise, dans un référentiel galiléen  $R(Oxyz)$ , à l'action conjuguée d'un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  ( $B > 0$ ) et d'un champ électrostatique créé par une charge ponctuelle  $-Q$  ( $Q > 0$ ) fixée en  $O$ .

Le poids de la particule sera négligé.

À l'instant initial  $t = 0$ , la particule se trouve au point  $A(0, a, 0)$  avec la vitesse  $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$  où  $v_0$  est une grandeur algébrique.

Donner les valeurs de  $v_0$  pour que la trajectoire soit un cercle de centre  $O$ .

**Commentaires** : sujet simple dont la solution générale n'est pas analytique. Le cas particulier du mouvement circulaire est analytique en revanche. La conduite de l'exercice est laissée à l'initiative du candidat qui peut par exemple commencer par traiter des cas partiels (absence de l'un des deux champs), puis généraliser.

On remarque tout d'abord que le mouvement s'effectue dans le plan  $(Oxy)$ . À justifier par l'expression des forces en présence et par les conditions initiales.

En l'absence de charge ponctuelle, on trouve immédiatement que la vitesse du  $mv_1$  circulaire est :  $v_1 = \frac{qBa}{m}$ .



En l'absence de champ magnétique, la vitesse du mouvement circulaire est :  $v_2 = \pm \left( \sqrt{\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 am}} \right)^{1/2}$ .

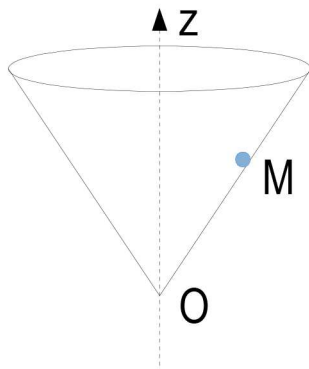
En présence des deux champs, électrique et magnétique, le mouvement circulaire est caractérisé par l'équation suivante :  $m \frac{v_0^2}{a} = \left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a^2} \right) + qv_0 B$ , soit  $v_0^2 = v_2^2 + v_0 v_1$  et finalement  $v_0 = \frac{1}{2} \left( v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + 4v_2^2} \right)$ .

Le signe de la vitesse n'est pas fixé a priori.

Cet exercice est ensuite étendu au cas le plus général d'un mouvement elliptique. Dans le second cas en particulier on retrouve le pb de Képler, d'attraction entre deux particules. La vitesse initiale détermine le type de mouvement ultérieur (elliptique, hyperbolique, parabolique).

### Mouvement d'un mobile dans un cône

On considère une masse ponctuelle dans un cône. On la lance au point  $C$  avec une vitesse horizontale tangente au cône en  $C$ . On suppose que le mouvement s'effectue sans frottement.



Quel est le mouvement ultérieur de la masse ?

**Commentaires** : exercice à résoudre in fine par une analyse d'énergie potentielle effective. A noter qualitativement qu'en absence de frottement il n'y a pas de raison pour que la bille "tombe" au fond du cône.

On définit les coordonnées du point  $M$  dans un système cylindrique :  $(r, \theta, z)$ .

Les conditions initiales s'écrivent :

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 0 ; r_0 = a ; z_0 = a / \tan(\alpha) \\ \dot{\theta}_0 &= \omega ; \dot{r}_0 = a ; \dot{z}_0 = 0 . \end{aligned}$$

L'application du PFD à la masse donne le jeu d'équations suivantes :

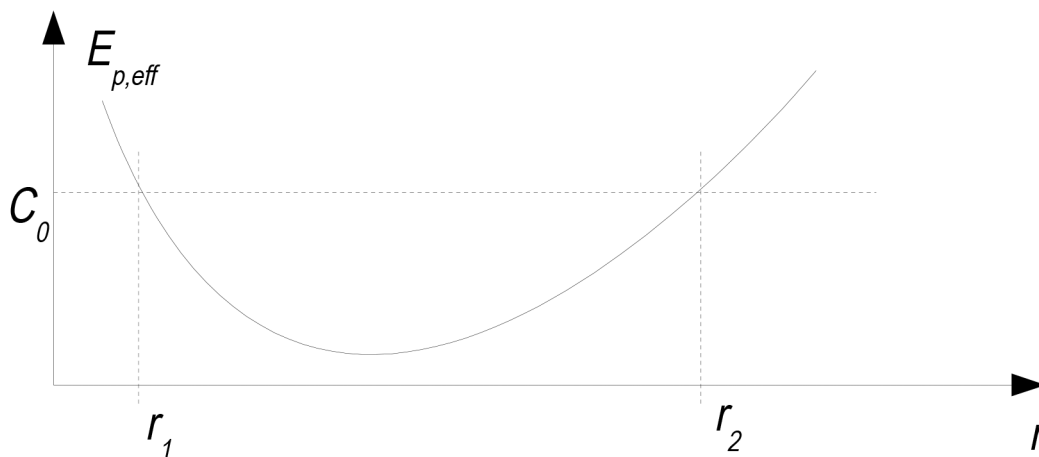
$$\begin{aligned}
 m\vec{\gamma} &= m\vec{g} + \vec{N} \quad \text{soit} \\
 m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -N \cos \alpha \\
 m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) &= 0 \Leftrightarrow \text{Force centrale} \Leftrightarrow r^2\dot{\theta} = \text{cte} = a^2\omega \\
 m\ddot{z} &= N \sin \alpha - mg
 \end{aligned}$$

Bilan énergétique :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + mgz &= \text{cte} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{a^4\omega^2}{r^2} + \frac{\dot{r}^2}{\tan^2 \alpha}\right) + mg\frac{r}{\tan \alpha} &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2 + mg\frac{a}{\tan \alpha} \\
 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}\right)\dot{r}^2 + \frac{a^4\omega^2}{r^2} + 2g\frac{r}{\tan \alpha} &= \left(a^2\omega^2 + 2g\frac{a}{\tan \alpha}\right).
 \end{aligned}$$

Energie potentielle effective  $E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{a^4\omega^2}{r^2} + 2g\frac{r}{\tan \alpha}$  et la constante du mouvement :  $C_0 = \left(a^2\omega^2 + 2g\frac{a}{\tan \alpha}\right)$ .

Le mouvement de la particule est étudié par l'analyse de la fonction énergie potentielle en fonction de la distance de la particule à l'axe. Le mouvement est donc borné entre les rayons  $r_1$  et  $r_2$  (c'est-à-dire les altitudes  $z_1$  et  $z_2$ ).



### Chute d'une barre en contacts ponctuels

Une barre de longueur  $2l$  et de masse  $m$  est initialement verticale. Son extrémité est en contact avec un plan horizontal.

La barre tombe, l'extrémité restant sur le plan, le coefficient du frottement étant  $f$ .

Calculer l'angle à partir duquel la barre se met à glisser.

**Commentaires** : application directe des lois de Coulomb sur le frottement. Il est donc nécessaire de calculer les composantes normale et tangentielle de la réaction de la barre sur le sol. Le choix d'un repère de projection pertinent est important.‡

On appelle  $x$  l'axe vertical ascendant,  $y$  l'axe horizontal. L'angle que fait la barre avec la verticale est appelé  $\theta$ .

Dans le système d'axes  $(Oxy)$  on détermine :  $R_x = mg + ma_x$ ,  $R_y = ma_y$  où les composantes de l'accélération en fonction de l'angle  $\theta$  valent :  $a_x = (l \sin \theta)$ ,  $a_y = (l \cos \theta)$ .

D'autre part, tant que la barre ne glisse pas il est possible d'appliquer le TMC au point de contact :  $J\ddot{\theta} = mgl \sin \theta$ ,  $\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = mgl(1 - \cos \theta)$ .

Le moment d'inertie (donné) vaut  $J = \frac{4}{3}ml^2$ .

Ces deux expressions permettent d'éliminer les dérivées premières et secondes de l'angle au profit des fonctions trigonométriques.

On détermine ainsi les expressions complètes des réactions normale et tangentielle :  $R_x = \frac{mg}{4}(1 - 3 \cos \theta)^2$ ,  $R_y = 3\frac{mg}{4} \sin \theta(3 \cos \theta - 2)$ .

Tant que la barre ne glisse pas, on doit vérifier la condition :  $|R_y| \leq f|R_x|$ . Soit la relation sur l'angle :

$$3 \sin \theta |3 \cos \theta - 2| \leq f(1 - 3 \cos \theta)^2 .$$

La fonction obtenue  $f(\theta) = 3 \sin \theta \frac{|3 \cos \theta - 2|}{(1 - 3 \cos \theta)^2}$  est définie tant que l'angle est inférieur à  $\theta_1$  vérifiant :  $1 - 3 \cos \theta_1 = 0$ .

L'angle à partir duquel la barre se met à glisser est solution de :  $f(\theta) = f$ .