Devoir de révisions de PCSI

Le sujet est composé de 6 exercices indépendants qui permettent de réviser le programme de première année et, ainsi, de bien commencer la deuxième. Il est à faire et rendre pour le jour de la rentrée.

I. Satellite SPOT

Le satellite d'observation SPOT (S), de masse m, est en orbite circulaire autour de la Terre à l'altitude initiale $h = 800$ km et à la vitesse $\vec{v}$ par rapport au référentiel géocentrique.

1) Exprimer sa vitesse v en fonction du rayon de sa trajectoire. Retrouver la troisième loi de KEPLER.

2) Établir une relation simple entre l'énergie cinétique du satellite et son énergie potentielle dans le référentiel géocentrique. En déduire son énergie mécanique.

3) Ce satellite est soumis de la part de l'atmosphère raréfiée à la force de frottement $\vec{f} = -\alpha m v \vec{v}$, où α est une constante. Le satellite va-t-il s'éloigner ou se rapprocher de la Terre ? Sa vitesse va-t-elle augmenter ou diminuer ? Quelle est la dimension de α ?

4) On considère qu'à chaque révolution, le satellite subit une variation d'altitude de 1 m. Écrire le théorème de la puissance mécanique, et en déduire un ordre de grandeur de α sachant que la trajectoire est quasi-circulaire sur une révolution.

5) Quelle est la perte d'altitude du satellite au bout de dix ans ?

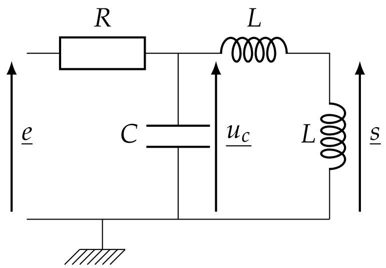
6) Le rôle du satellite SPOT est d'acquérir plusieurs images d'une même zone à des instants différents. D'après les résultats précédents, discuter du choix de l'altitude de l'orbite.

Données numériques :

- $\mathcal{G} = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$;
- $M_{\text{Terre}} = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg ;
- $R_{\text{Terre}} = 6{,}4 \cdot 10^{3}$ km.

II. Filtre de HARTLEY

On réalise le montage représenté sur la figure suivante. Les résistances des bobines seront négligées devant les autres impédances du montage.

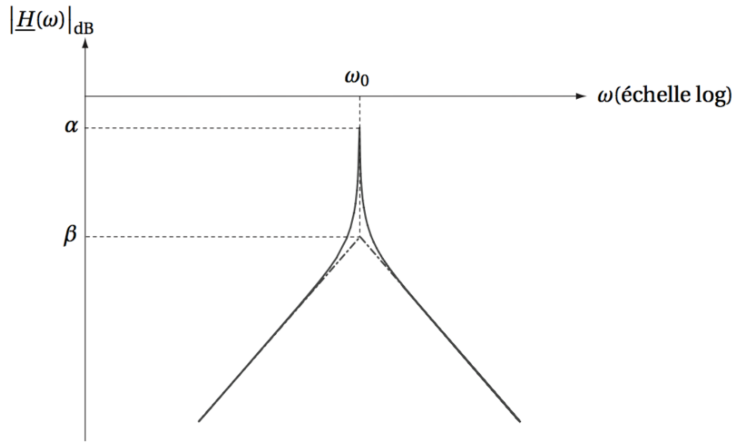


1) Établir l'expression de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{2jmxH_0}{1 + 2jmx - x^2}$$

où $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite. Exprimer H_0, ω_0 et m en fonction de R, L et C.

2) Le diagramme de BODE est tracé sur la figure ci-dessous pour $R = 10{,}0\ \mathrm{k\Omega}$, $L = 1{,}0$ mH et $C = 100{,}0$ nF. On gardera ces valeurs pour la suite de l'exercice.



Identifier les valeurs de α et β. Quelles sont les pentes des asymptotes ? Quelle est l'allure de diagramme de BODE en phase ?

3) Le signal d'entrée est choisi de la forme $e_1(t) = E_0 + E_1 \cos(\omega_0 t)$. Représenter sur un même graphique les signaux $e_1(t)$ et $s_1(t)$ tels qu'on pourrait les observer à l'oscilloscope.

4) Le signal d'entrée $e_2(t)$ est maintenant un signal créneau d'amplitude $E_{20} = 1{,}0$ V et de fréquence $f_2 = 3{,}75$ kHz. Il est décomposable en série de FOURIER :

$$e_2(t) = \frac{4E_{20}}{\pi}\left[\sin(\omega_2 t) + \frac{\sin(3\omega_2 t)}{3} + \cdots + \frac{\sin((2n+1)\omega_2 t)}{2n+1} + \cdots\right]$$

avec $\omega_2 = 2\pi f_2$.

Calculer numériquement les amplitudes des trois premières composantes du signal d'entrée et celles du signal de sortie. Justifier alors le nom de « tripleur de fréquence » donné à ce montage. Quelle est l'expression approchée du signal de sortie ?

5) On alimente maintenant le montage avec un échelon de tension $e_3(t)$ de hauteur $E_{30} = 1{,}0$ V. Établir que l'équation différentielle vérifiée par $s_3(t)$ pour $t > 0$ est $\ddot{s}_3 + 2m\omega_0\dot{s}_3 + \omega_0^2 s_3 = 0$.

6) Justifier que $s_3(0^+) = 0$ et $\frac{ds_3}{dt}(0^+) = \frac{E_{30}}{2RC}$.

7) Compte tenu des valeurs numériques, qui permettent de simplifier l'expression, établir que

$$s_3(t) \approx \frac{E_{30}}{2\omega_0 RC}\exp(-m\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)$$

Tracer l'allure de $s_3(t)$.

III. Moteur de scooter

Le moteur d'un scooter est un moteur à deux temps :

- premier temps : compression du mélange air-carburant (FB), puis combustion (BC) ;
- deuxième temps : détente (CD), échappement des gaz de combustion et admission d'une nouvelle charge de mélange carburé (DHF).

On fait les hypothèses suivantes :

- la combustion (BC) est instantanée et le piston n'a pas le temps de se déplacer : $V = V_C$;
- la détente (CD) et la compression (FB) sont adiabatiques réversibles ;
- lors de l'échappement et de l'admission (DF) quasi instantanés, le volume du cylindre est constant : $V = V_D$.

On appelle cylindrée du moteur la différence $V_D - V_C$ et taux de compression le rapport $a = \frac{V_D}{V_C}$. On suppose que le mélange air-carburant est un gaz parfait ($\gamma = 1,40$) de masse molaire $M = 28{,}8\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$. La constante des gaz parfaits est : $R = 8{,}31\ \mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$.
En F : $T_F = 300$ K et $P_F = 1{,}00\cdot 10^5$ Pa.
La notice technique du scooter donne :

- vitesse maximale : $45{,}0\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$;
- régime de puissance maximale : $7000\ \mathrm{tours\cdot min^{-1}}$;
- puissance maximale : 4,40 kW ;
- cylindrée : $49{,}5\ \mathrm{cm^3}$;
- course du piston : 39,2 mm.

Lorsque le scooter roule à son allure maximale, le régime est aussi maximal.
On rappelle que l'entropie d'un gaz parfait de capacités thermiques à volume constant C_V et à pression constante C_P est donnée par :

$$S(T,V) = S(T_0,V_0) + C_V\ln\frac{T}{T_0} + nR\ln\frac{V}{V_0} \quad \text{ou} \quad S(T,P) = S(T_0,P_0) + C_P\ln\frac{T}{T_0} - nR\ln\frac{P}{P_0}$$

1) Tracer l'allure du cycle $(FBCDF)$ sur un diagramme de Watt (P,V).

2) Lorsque le scooter roule à son allure maximale, quelle est la durée d'un cycle ? Quelle est la vitesse moyenne du piston ?

3) La pression en fin de compression est de $6\cdot 10^5$ Pa. En déduire le taux de compression a. Effectuer l'application numérique.

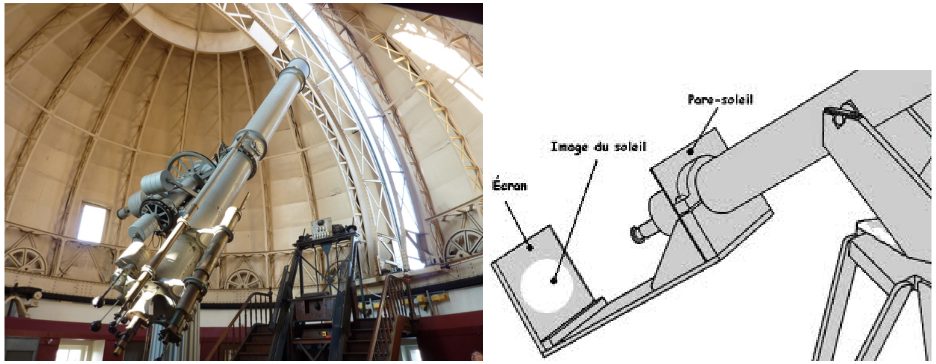
4) Exprimer le rendement η du moteur en fonction de a et γ.

5) En prenant $\eta = 0,4$, calculer le transfert thermique libéré à chaque cycle par la combustion lorsque le scooter roule à son allure maximale.

6) Sachant que le pouvoir calorifique de l'essence, c'est-à-dire le transfert thermique libéré par la combustion, est $q = 30\ \mathrm{kJ\cdot cm^{-3}}$, déterminer la consommation pour 100 km.

IV. Lunette astronomique

La lunette astronomique de l'observatoire de Strasbourg a un objectif constitué d'une lentille convergente de distance focale $f_1' = 7{,}0$ m, et de diamètre $\phi_1 = 48{,}7$ cm. On l'utilise avec un oculaire que l'on modélise par une lentille mince convergente de distance focale $f_2' = 80$ mm.



1) À quelle condition l'observation d'un astre au travers de la lunette peut-elle se faire sans effort d'accommodation ?

2) Un astre, sans instrument, est vu sous un diamètre angulaire apparent $\alpha = 0{,}1$. Sous quel diamètre angulaire apparent α' sera-t-il vu au travers de la lunette ?

3) Dans l'une des histoires d'Edgar ALLAN POE, l'auteur raconte qu'en pointant un télescope sur une colline éloignée, il observe un « dragon » ramper jusqu'à elle. Plus tard, il se rend compte que le dragon est une fourmi se déplaçant sur la vitre à travers laquelle il observe la colline.

   Supposons que l'on pointe la lunette étudiée vers la Lune, et qu'une araignée ait tissé sa toile dans l'entrebâillement de la coupole. L'araignée se situe à 1 m devant l'objectif de la lunette. Qu'observe l'astronome ? Concluez quant à l'histoire d'Edgar ALLAN POE.

4) Pour observer les taches solaires, on peut utiliser une *observation par projection* : on pointe la lunette en direction du Soleil, on place un écran à l'arrière de la lunette, et on déplace l'oculaire pour obtenir une image nette du Soleil sur l'écran, comme à droite de la figure 1.

   En supposant que l'écran soit placé 8 m à l'arrière de l'objectif, de combien doit-on déplacer l'oculaire pour réaliser cette observation par projection ?

   Le Soleil a un diamètre angulaire apparent de 0,5 . Quelle sera la taille de son image sur l'écran ? Quelle aurait été la taille de l'image si on avait utilisé l'objectif seul ?

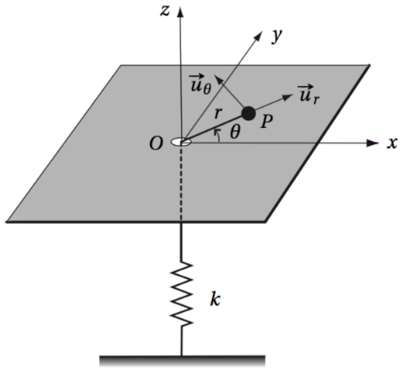
5) Où se situe l'image de l'objectif par l'oculaire ? Quelle est la taille de cette image ? L'observateur place son œil de sorte que cette image soit incluse dans sa pupille. Pourquoi ?

Pour une lentille mince de centre optique O, de focale f', de foyer objet F, de foyer image F', avec A' image de A sur l'axe optique, on rappelle les formules de conjugaison et du grandissement transverse γ :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \ ; \ \overline{F'A'} \times \overline{FA} = -f'^2 \text{ et } \gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$$

V. Mouvement sur un plan horizontal

Une bille, assimilée à un point matériel P de masse m se déplace sur une table à coussin d'air horizontale, confondue avec le plan (Oxy). Elle est reliée par l'intermédiaire d'un fil de longueur ℓ à un ressort vertical de raideur k (cf. figure ci-dessous). La masse du fil et celle du ressort sont négligeables par rapport à celle de la bille.
Le point P est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) dans le plan horizontal.
Il n'y a aucun frottement, ni entre la bille et la table, ni au niveau du trou dans la table. Quand $r = 0$, le ressort n'est pas tendu. Les conditions initiales sont : $r(0) = r_0$ et $\vec{v}(0) = \dot{r}_0 \vec{u_r} + r_0 \dot{\theta}_0 \vec{u_\theta}$.



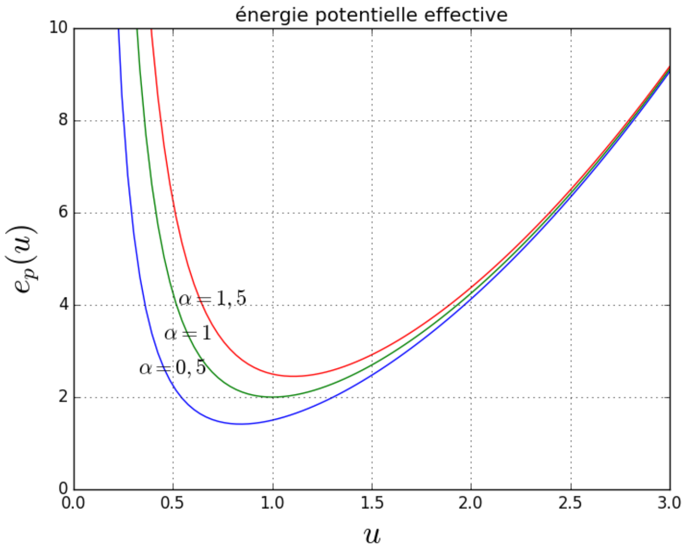
1) Montrer que le moment cinétique $\vec{L_0}$ en O de la bille est constant au cours du temps.

2) Déterminer l'énergie totale du système en fonction de k, m, r, $\dot{r}$ et de $L_0 = \|\vec{L_0}\|$.

3) En déduire l'équation du mouvement sous la forme d'une équation du deuxième ordre en $r(t)$.

4) Définir une énergie potentielle effective $E_{\text{p,eff}}$. On pose : $u = \frac{r}{r_0}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\alpha = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega}$. Exprimer $e_p = \frac{E_{\text{p,eff}}}{\frac{1}{2}kr_0^2}$ en fonction de u et α uniquement. Quel est l'intérêt de cette expression ?

5) On donne les courbes représentant e_p en fonction de u pour différentes valeurs de α.



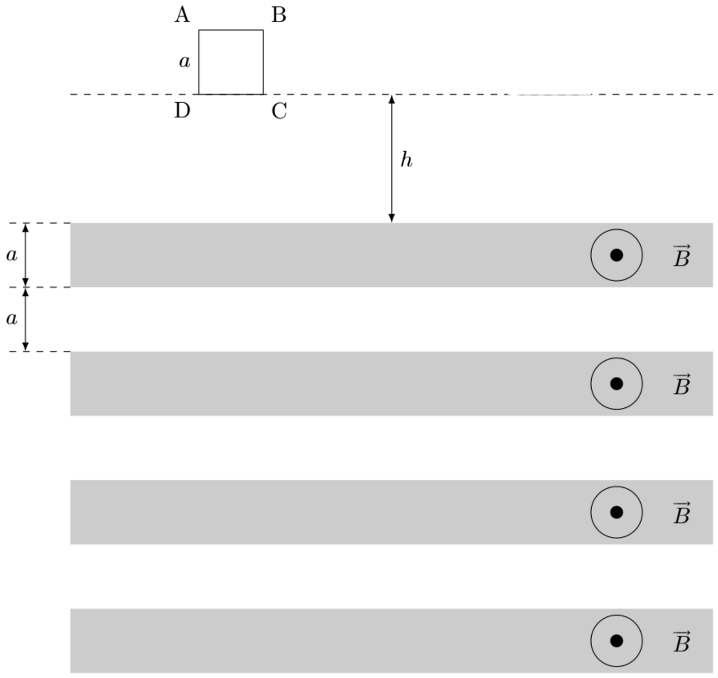
Montrer que r est borné.

6) On constate que selon que $\dot{\theta}_0$ est supérieur ou inférieur à une certaine valeur ω_c, le point P commence par se rapprocher ou par s'éloigner du point O. Expliquer.

7) Le mouvement peut-il être circulaire ? Si oui, pour quelles conditions initiales ?

VI. Millefeuille magnétique

Un cadre conducteur carré et vertical $ABCD$ de coté a, de masse m et de résistance R tombe dans le champ de pesanteur. Il rencontre une succession de quatre zones horizontales d'épaisseur a dans lesquelles règne un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ horizontal, uniforme et constant. Chaque zone est séparée de ses voisines par des zones sans champ magnétique, également d'épaisseur a. L'ensemble forme ainsi une sorte de millefeuille magnétique.



On propose de répondre à la question suivante : à quelle hauteur faut-il lâcher le cadre $ABCD$, sans vitesse initiale, pour qu'il traverse le millefeuille à vitesse constante ?

1) Dans les quatre premières questions on s'intéresse uniquement à l'entrée du cadre dans la première zone de champ magnétique. Justifier qualitativement que le cadre est freiné.

2) Calculer la force électromotrice induite dans le cadre et établir l'équation électrique du système.
On négligera le phénomène d'auto-induction.

3) Quelle est la résultante des forces de LAPLACE sur le cadre ? Établir alors l'équation mécanique du système.

4) En déduire l'expression de la vitesse $v(t)$ du cadre. À quelle condition sa vitesse est-elle constante ? Interpréter.

5) Que se passe-t-il lorsqu'il commence à sortir de la première zone de champ magnétique ?

6) À partir de ce qui précède, répondre à la question posée en début d'exercice.

Données numériques : $a = 10\,\text{cm}$, $R = 0{,}1\,\Omega$, $m = 10\,\text{g}$, $B = 1{,}0\,\text{T}$ et $g \approx 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.