# Devoir surveillé n°5
# 2 heures

## Exercice 1

1. Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a :
$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+3}$$
2. Déterminer le nombre réel $\alpha$ tel qu'il existe une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \, , \, \mathbb{P}(X = n) = \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\alpha.$$

## Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance un dé parfait à 5 faces $n$ fois, avec des faces numérotés de 1 à 5.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $A_n$ l'événement « la somme des $n$ lancers donne un nombre pair », et $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

1. Calculer $p_1$.
2. Montrer que
$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1})\mathbb{P}(\overline{A_n}).$$
3. Déterminer $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$ et en déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \, , \, p_{n+1} = ap_n + b$$
avec $a$ et $b$ des constantes à préciser.
4. Calculer alors $p_n$ pour tout $n$, $n \geqslant 1$ et en déduire la limite de $(p_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
5. Sauriez-vous généraliser à un dé à $f$ faces, $f \geqslant 1$ ?

## Exercice 3 (Source : Feller)

On suppose que[1] $p_n = \alpha p^n$ est la probabilité qu'une famille ait exactement $n$ enfants avec $n \geqslant 1$ et $p_0 = 1 - \alpha p(1 + p + p^2 + \cdots)$. On suppose de plus que toutes les distributions des $n$ enfants selon le sexe ont la même probabilité.
On considère les événements $A_n$ « la famille a $n$ enfants », $B_k$ « la famille a $k$ garçons, $n$ et $k$ des entiers.

1. Déterminer $p_0$.

1. $p = 0,7358$ dans les statistiques Américaines : A.J. Lotka, Théorie analytique des associations biologiques II, actualités scientifiques et industrielles, no 780, Paris 1939

2. Montrer que la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complète d'événements.
3. Montrer que si $k \in \mathbb{N}^*$,
$$P(B_k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P_{A_n}(B_k).P(A_n)$$
4. Justifier par dénombrement précis que $P_{A_n}(B_k) = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}$.
5. En déduire que
$$P(B_k) = \alpha \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{p}{2}\right)^n$$
6. Justifier par récurrence sur $k$, $k \in \mathbb{N}$, que si $x \in ]-1, 1[$,
$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$
7. En déduire la valeur de $P(B_k)$ pour $k \geqslant 1$.
8. Déterminer $P(B_0)$.

## Exercice 4

Soit $X$ une variable aléatoire discrète à valeurs réelles sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose si $x \in \mathbb{R}$,
$$F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

1. Montrer que $F$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, bornée par 0 et 1. Que peut-on en déduire ?
2. On note pour tout entier $n$, $A_n = (X \leqslant n)$. Montrer que la suite $(A_n)$ est une suite croissante d'événements.
   Montrer (rigoureusement) que
$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega$$
   et en déduire la limite de $F(x)$ en $+\infty$.
3. Sauriez-vous déterminer de même la limite de $F$ en $-\infty$ ?
4. Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère les événements $A_n$ définis par
$$A_n = \left(X \leqslant a + \frac{1}{n}\right)$$
   pour $n \geqslant 1$. Montrer que $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante d'événements. En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} F\left(a + \frac{1}{n}\right) = F(a).$$
   En déduire que $F$ est continue à droite en $a$.
5. On suppose que $X$ est la variable aléatoire dont la valeur est égal au chiffre obtenu lors d'un lancer d'un dé à 6 faces.
   Calculer $F(x)$ pour tout $x$ réel et représenter la fonction $F$. Est-ce compatible avec les propriétés vues dans les questions précédentes ?

# Exercice 1

1. Nous avons facilement directement si $n$ entier non nul,
$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} = \frac{n+3-n}{n(n+3} = \frac{3}{n(n+3}$$
2. La condition est que l'on ait $\mathbb{P}(X=n)$ positif pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, c'est à dire $\alpha$ positif avec $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = 1$. Or
$$\frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3}{n(n+3)} \times \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$
et ainsi par télescopage,
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{6} - \frac{1}{N(N+1)(N+2)(N+3)} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{6}.$$
Ainsi la condition est $\alpha = 6$.

# Exercice 2

1. On a $p_1 = \mathbb{P}(A_1) = \frac{2}{5}$ puisque nous avons 2 façons sur 5 (uniforme) d'obtenir un nombre pair en un seul lancer.
2. Nous avons le système complet d'événements $(A_n, \overline{A_n})$, et ainsi en appliquant la formule des probabilités totales avec ce système complet pour le calcul de la probabilité de $A_{n+1}$, nous obtenons
$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}).\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}).\mathbb{P}(\overline{A_n}).$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que $A_n$ est réalisé, la somme des $n$ lancers est paire, la somme des $n+1$ est paire si et seulement si le lancer $n+1$ donne un chiffre pair, et ainsi
$$\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{2}{5}.$$
Sachant que $\overline{A_n}$ est réalisé, la somme des $n$ lancer est impaire, la somme des $n+1$ est paire si et seulement si le lancer $n+1$ donne un chiffre impair, et ainsi
$$\mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{3}{5}.$$
Ainsi en repportant, nous obtenons
$$p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{3}{5}(1-p_n) = -\frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}.$$
4. La suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite récurrente arithmético-géométrique. On recherche le point fixe associé : on a
$$x = -\frac{1}{5}x + \frac{3}{5} \iff 5x = -x + 3 \iff 6x = 3 \iff x = \frac{1}{2}$$

et alors si $n \geqslant 1$,

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}(\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$$

ce qui conduit à

$$\forall n \geqslant 1 \, , \, p_n - \frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)$$

soit encore

$$\forall n \geqslant 1 \, , \, p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} .$$

Comme $\frac{1}{5} < 1$, nous obtenons que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\frac{1}{2}$, en ocsillant autour de la limite (plus petit, puis plus grand, etc).

5. Lorsque $f$ est pair, nous obtenons en fait $p_1 = \frac{1}{2}$ et

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}).\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}).\mathbb{P}(\overline{A_n}) = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}(1-p_n) = \frac{1}{2}$$

et ainsi la suite $(p_n)$ est constante égale à $\frac{1}{2}$.

Lorsque $f$ est impair, $f = 2k+1$, nous obtenons en fait $p_1 = \frac{k}{2k+1}$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}).\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}).\mathbb{P}(\overline{A_n}) &= \frac{k}{2k+1}p_n + \frac{k+1}{2k+1}(1-p_n) \\ &= -\frac{1}{2k+1}p_n + \frac{k+1}{2k+1}\end{aligned}$$

La suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite récurrente arithmético-géométrique. On recherche le point fixe associé : on a

$$x = -\frac{1}{2k+1}x + \frac{k+1}{2k+1} \iff fx = -x + k + 1 \iff (2k+2)x = k+1 \iff x = \frac{1}{2}$$

et alors si $n \geqslant 1$,

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2k+1}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$$

ce qui conduit à

$$\forall n \geqslant 1 \, , \, p_n - \frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)$$

soit encore

$$\forall n \geqslant 1 \, , \, p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(k+1)} \left(-\frac{1}{2k+1}\right)^{n-1} .$$

Comme $\frac{1}{2k+1} < 1$, nous obtenons que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\frac{1}{2}$, en oscillant autour (plus petit, plus grand, etc).

## Exercice 3

1. Une famille admet un nombre d'enfant $n$ et un seul, avec $n \in \mathbb{N}$, et ainsi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complète d'événements. On a $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ et ainsi $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ et donc

$$p_0 = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1 - \alpha\frac{p}{1-p} = \frac{1-(1+\alpha)p}{1-p}.$$

2. Une famille admet un nombre d'enfant $n$ et un seul, avec $n \in \ltimes$, et ainsi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complète d'événements. On peut aussi considèrer la variable aléatoire $N$ dont la valeur est le nombre d'enfant d'une famille. C'est une variable aléatoire prenant les valeurs de $\mathbb{N}$, et $A_n = (X = n)$, et ainsi la famille $((X = n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille complète d'événements.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on applique la formule des probabilités totales avec la famille $((X = n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui est une famille complète d'événements, on a

$$P(B_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B_k).P(A_n)$$

Or si $n < k$, nous avons $P_{A_n}(B_k) = 0$ puisque si $A_n$ est réalisé, la famille ne peut pas avoir $k$ garçons avec $n < k$ ou encore

$$P_{A_n}(B_k) = \frac{P(A_n \cap B_k)}{P(A_n)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0.$$

Ainsi la somme se réduit à

$$P(B_k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P_{A_n}(B_k).P(A_n)$$

4. Sachant que la famille possède $n$ enfant, on considère l'obtention de $k$ succès (garçon) parmi $n$, de loi $\mathcal{B}(n, 1/2)$, et ainsi

$$P_{A_n}(B_k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}.$$

5. En déduire que

$$P(B_k) = \alpha \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{p}{2}\right)^n$$

6. Montrons par récurrence sur $k$, $k \in \mathbb{N}$, que si $x \in ]-1, 1[$,

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

Pour $k = 0$, nous avons bien si $x \in ]-1, 1[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Si on suppose que pour $k$ fixé, avec $k \geqslant 0$, si $x \in ]-1, 1[$, alors

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

alors par dérivation sur $]-1, 1[$,

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!(n-k)}{(n-k)!}x^{n-k-1} = \frac{k!(k+1)}{(1-x)^{k+2}}$$

soit encore

$$\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{n!(n-k)}{(n-k)!} x^{n-k-1} = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}$$

soit

$$\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k-1)!} x^{n-k-1} = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}$$

c'est à dire

$$\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-(k+1)!} x^{n-(k+1)} = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{(k+1)+1}}$$

ce qui achève la récurrence.

7. On en déduit alors la valeur de $P(B_k)$ pour $k \geqslant 1$. En effet, nous avons en transférant le terme en $k!$

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

et en multipliant par $x^k$

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n} = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

d'où en apliquant à $x = \frac{p}{2}$,

$$P(B_k) = \alpha \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{p}{2}\right)^n = \alpha \frac{p^k}{2^k \left(1-\frac{p}{2}\right)^{k+1}} = \frac{2\alpha p^k}{(2-p)^{k+1}}$$

8. On détermine aussi $P(B_0)$. On a deux méthodes :

• Par complémentarité, on a

$$\begin{aligned} P(B_0) &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(B_k) = 1 - 2\alpha \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^k}{(2-p)^{k+1}} \\ &= 1 - \frac{2\alpha p}{(2-p)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^{k-1}}{(2-p)^{k-1}} \\ &= 1 - \frac{2\alpha p}{(2-p)^2} \times \frac{1}{1-\frac{p}{2-p}} = 1 - \frac{\alpha p}{(1-p)(2-p)} \end{aligned}$$

• Directement, comme ci-dessus

$$\begin{aligned} P(B_0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B_0).P(A_n) = 1.p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha p^n \frac{1}{2^n} \\ &= 1 - \alpha \frac{p}{1-p} + \alpha \frac{p}{2} \frac{1}{1-\frac{p}{2}} = 1 - \alpha \frac{p}{1-p} + \alpha \frac{p}{2-p} \\ &= 1 - \frac{\alpha p}{(1-p)(2-p)} \end{aligned}$$

# Exercice 4

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, avec $x \leqslant y$. Si $X \leqslant x$, alors $X \leqslant y$ et ainsi $(X \leqslant x) \leqslant (Y \leqslant y)$ et comme la probabilité est croissante, on a $\mathbb{P}(X \leqslant x) \leqslant \imath(X \leqslant y)$ et donc $F(x) \leqslant F(y)$. Ainsi la fonction $F$ est une fonction croissante.
   De plus par définition d'une probabilité, on a pour tout $x$ réel, $\mathbb{P}(X \leqslant x) \in [0, 1]$ et donc $F$ est bornée par 0 et 1.
   D'après le théorème de la limite monotone pour les fonctions, on peut en déduire que $F$ admet des limites en $-\infty$ et en $+\infty$ avec
$$0 \leqslant \ell = \lim_{x\to-\infty} F(x) \leqslant \lim_{x\to+infty} F(x) = L \leqslant 1.$$
   On peut aussi en déduire que $F$ admet des limite à droite et à gauche en tout point $a$ de $\mathbb{R}$, avec
$$0 \leqslant \ell \leqslant \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} F(x) \leqslant \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} F(x) \leqslant l \leqslant 1.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, si $x \leqslant n$, alors $X \leqslant n+1$ et ainsi $(X \leqslant n) \subset (x \leqslant n+1)$ soit $A_n \subset a_{n+1}$. Ainsi la suite $(A_n)$ est bien une suite croissante d'événements.

   Comme $\Omega$ est l'univers, on a l'inclusion
$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \subset \Omega$$
   On peut aussi préciser que $A_n$ est un événement (défini à l'aide de la variable aléatoire $X$) et que la réunion dénombrable est aussi un événement, donc contenu dans l'univers $\Omega$ et même apprtenant à la tribu $\mathcal{A}$.

   Réciprquement, si $\omega \in \Omega$, nous avons $x = X(\omega) \in \mathbb{R}$, et il existe un entier $n_0$ par exemple $n_0 = [x] + 1$ tel que $X(\omega) \leqslant n_0$ et ainsi $\omega \in (X \leqslant n_0) = A_{n_0}$. On en déduit que $\omega$ est dans $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$.
   Finalement, on a bien par double inclusion
$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega.$$
   Par théorème de continuité croissante, on a alors
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to+\infty} F(n) = L$$
   et ainsi la limite de $F$ en $+\infty$ est $L = 1$.
3. On définit les événements $B_n = (X \leqslant -n)$ pour $n$ entier. Nous avons alors une suite décroissante d'événements, avec
$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n = \emptyset$$
   En effet, si $\omega$ est dans cette intersection, pour tout $n$, on a $X(\omega) \leqslant -n$, ce qui est impossible puisque $-n$ tend vers $-\infty$ lorsque $n$ tend vers$+\infty$. Notre intersection est

vide.
En appliquant le théorème de continuité décroissante, nous obtenons

$$0 = \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to+\infty} F(-n) = \ell$$

et ainsi la limite de $F$ en $+\infty$ est $\ell = 0$.

4. Soit $n \geqslant 1$, si $A_{n+1}$ est réalisé, $X \leqslant a + \frac{1}{n+1}$ et ainsi $X \leqslant \frac{1}{n}$ et donc $A_n$ est réalisé. Donc $A_{n+1} \subset A_n$. On en déduit que la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est bien une suite décroissante d''événements. De plus, on a

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = (X \leqslant a)$$

L'inclusion $\supset$ est claire et pour $\subset$, si $\omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$, on a pour tout $n \geqslant 1$, $X(\omega) \leqslant a + \frac{1}{n}$ et ainsi en passant à la limite en $n$, $X(\omega) \leqslant a$.

On applique alors le théorème de la continuité décroissante,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}(X \leqslant a) = F(a)$$

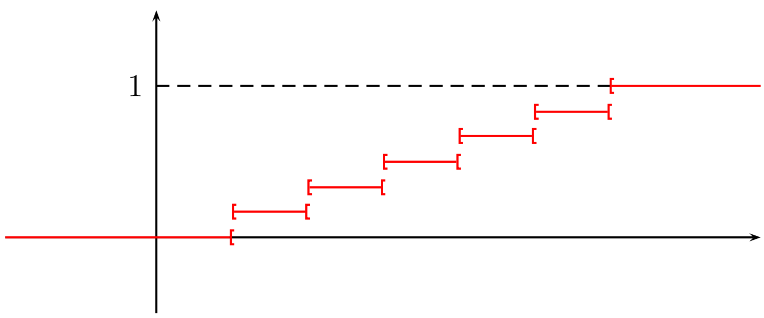
d'où le résultat.

Comme $F$ admet une limite à droite en $a$ (monotonie de $F$), cette limite est forcément $F(a)$, d'où la continuité de $F$ en $a$.

5. Nous avons de façon immédiate

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x \in [1,2[ \\ \frac{2}{6} & \text{si } x \in [2,3[ \\ \frac{3}{6} & \text{si } x \in [3,4[ \\ \frac{4}{6} & \text{si } x \in [4,5[ \\ \frac{5}{6} & \text{si } x \in [5,6[ \\ 1 & \text{si } x \geqslant 6 \end{cases}$$

On représente la fonction $F$ :




On retrouve la croissance, toutes les limites, la continuité à droite.