Quinzaine 6 du 08/12 au 19/12

Chapitre 6 : *Série entière*
Série entière de la variable réelle, de la variable complexe.
Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente (*).
Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.
Pour $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument, et pour $|z| > R$, diverge grossièrement.
Commentaires : les élèves doivent pouvoir exploiter les informations suivantes :
$(a_n z_0^n)$ bornée ; $(a_n z_0^n)$ non bornée ; $\sum a_n z_0^n$ convergente ; $\sum a_n z_0^n$ divergente ; $\sum a_n z_0^n$ absolument convergente mais divergente ; $\forall z$ avec $|z| < r$, la suite $(a_n z^n)$ bornée ou $\sum a_n z^n$ convergente ; et autres, en termes de conséquences sur le rayon.
Disque ouvert de convergence, intervalle de convergence (et cercle d'incertitude)
Si R_a est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R_b celui de $\sum b_n z^n$, alors :
si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ ou si $a_n = \mathrm{o}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$
si $|a_n| \sim |b_n|$ ou $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.
Utilisation de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon. La limite du rapport $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ peut être directement utilisée.
Les élèves doivent savoir utiliser, en adaptant, la règle de d'Alembert pour les séries lacunaires, par exemple de la forme $\sum b_n z^{2n}$ et $\sum b_n z^{2n+1}$.
Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence. Rayon de convergence d'une série dérivée.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum n^\alpha z^n$ est de rayon 1.
Rayon de convergence de la somme de deux séries entières (*).
Produit de Cauchy de deux séries entières. Rayon de convergence du produit de Cauchy de deux séries entières.
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum n^\alpha z^n$ est de rayon 1.
Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.
Exemple où la convergence est normale sur $[-R, R]$ et conséquence.
Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.
L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ou du disque de convergence n'est pas un objectif du programme ; étude cependant du cas où le critère spécial de Leibniz s'applique pour obtenir une convergence uniforme par la majoration du reste sur $[0, R]$ ou $[-R, 0]$ ou $[-R, R]$.
Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.
Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la somme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.
Expression des coefficients d'une série entière au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme (*). Unicité des coefficients pour une série entière de rayon de convergence non nul.
Formule par dérivation successive de $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$,

$$\forall x \in]-1, 1[\,, \quad \frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p} \qquad (*)$$

Développement en séries entière au voisinage de zéro d'une fonction d'une variable réelle.
Fonction développable en série entière.
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Formule de Taylor avec reste intégral. Utilisation avec les fonctions exponentielle (cosinus et sinus, exponentielle imaginaire).
Développements des fonctions usuelles : les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielles, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ (*), $x \mapsto \ln(1+x)$ (*).
Utilisation des équations différentielles. Développement de $(1+x)^\alpha$ en 0 (*). Cas $\alpha \in \{-1/2, 1/2\}$. Expression à l'aide de factorielles.
Continuité de la somme d'une série entière complexe sur le disque ouvert de convergence (admis).
Exemple de la somme géométrique complexe. Développement de $\exp(z)$ avec z complexe.

Questions de cours :

— Les énoncés des définitions, des théorèmes.
— Les démonstrations marquées par (*).
— Les méthodes usuelles sur des exemples.