Devoir en temps libre n°5

Variations en Poissons majeurs

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On rapelle que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \mathbb{P}(X = n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

Les questions 1,2,3,4 et 5 sont largement indépendantes.

1. Rappeler l'espérance et la variance de X.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X = n+1) \leqslant \mathbb{P}(X = n) \iff \lambda \leqslant n+1$$

   Peut-on avoir $\mathbb{P}(X = n+1) = \mathbb{P}(X = n)$?

   En déduire les variations de la suite $(\mathbb{P}(X = n))_{n\in\mathbb{N}}$. On notera N_λ la partie entière de λ.
   A.N. : Tracer la suite $(\mathbb{P}(X = n))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $\lambda = 2,5$ et $\lambda = 3$.
3. Soit P l'événement X pair et I l'événement X impair. Montrer que

$$\mathbb{P}(P) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{ch}(\lambda) \geqslant \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(I) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda) \leqslant \frac{1}{2}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que

$$\mathbb{P}(X \leqslant n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}$$

   (b) Soient $r \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(a,b) \in I^2$. On rappelle que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{r+1}$ sur I, alors on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{r} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(r+1)}(t)\frac{(b-t)^r}{r!}\mathrm{d}t.$$

   Montrer que,

$$e^\lambda = \sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^\lambda \frac{e^{\lambda-t}t^n}{n!}\mathrm{d}t.$$

   (c) En déduire que

$$\mathbb{P}(X \leqslant n) = 1 - \int_0^\lambda \frac{\mathrm{e}^{-t}t^n}{n!}\mathrm{d}t$$

   (d) Déterminer $\mathbb{P}(X \geqslant n)$ sous une forme intégrale lorsque $n \geqslant 1$. Que vaut $\mathbb{P}(X \geqslant 0)$?

5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires suivant la même loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$. On pose pour tout entier n non nul,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

et on admettra que $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$.

(a) Montrer que la variable alétoire $\dfrac{S_n}{n}$ admet une variance et la calculer.

(b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout entier n non nul,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \lambda + \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$$

(c) Rappeler l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire X positive d'espérance finie.

(d) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$ et $x > 0$.

i. Montrer que pour tout $\theta > 0$, on a

$$(X \geqslant x) = \left(\mathrm{e}^{\theta X} \geqslant \mathrm{e}^{\theta x}\right)$$

ii. Justifier que la variable aléatoire $\mathrm{e}^{\theta X}$ est d'espérance finie et montrer que

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta X}\right) = \mathrm{e}^{\mu \mathrm{e}^{\theta}}.$$

iii. Montrer que

$$\mathbb{P}(X \geqslant x) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta X}\right)}{\mathrm{e}^{\theta x}}$$

iv. En déduire que

$$\mathbb{P}(X \geqslant x) \leqslant \inf_{\theta > 0} \frac{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta X}\right)}{\mathrm{e}^{\theta x}}$$

v. En déduire que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \lambda + \varepsilon\right) \leqslant \inf_{\theta > 0} \mathrm{e}^{n\lambda \mathrm{e}^{\theta} - n(\lambda+\varepsilon)\theta}$$

vi. Montrer qu'il existe une constante $a > 0$ (dépendant de λ et ε uniquement) telle que pour tout entier n non nul

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \lambda + \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-na}$$

On étudiera les variations de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(\theta) = n\lambda \mathrm{e}^{\theta} - n(\lambda + \varepsilon)\theta$$

Comparer avec l'inégalité obtenue à la question b).

Fin