Devoir en temps libre n°5

Variations en Poissons majeurs

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On rapelle que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \mathbb{P}(X = n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

Les questions 1,2,3,4 et 5 sont largement indépendantes.

1. Rappeler l'espérance et la variance de X.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X = n+1) \leqslant \mathbb{P}(X = n) \iff \lambda \leqslant n+1$$

   Peut-on avoir $\mathbb{P}(X = n+1) = \mathbb{P}(X = n)$?

   En déduire les variations de la suite $(\mathbb{P}(X = n))_{n\in\mathbb{N}}$. On notera N_λ la partie entière de λ.
   A.N. : Tracer la suite $(\mathbb{P}(X = n))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $\lambda = 2,5$ et $\lambda = 3$.
3. Soit P l'événement X pair et I l'événement X impair. Montrer que

$$\mathbb{P}(P) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{ch}(\lambda) \geqslant \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(I) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda) \leqslant \frac{1}{2}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que

$$\mathbb{P}(X \leqslant n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}$$

   (b) Soient $r \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(a,b) \in I^2$. On rappelle que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{r+1}$ sur I, alors on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{r} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(r+1)}(t)\frac{(b-t)^r}{r!}\mathrm{d}t.$$

   Montrer que,

$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^{\lambda}\frac{e^{\lambda-t}t^n}{n!}\mathrm{d}t.$$

   (c) En déduire que

$$\mathbb{P}(X \leqslant n) = 1 - \int_0^{\lambda}\frac{\mathrm{e}^{-t}t^n}{n!}\mathrm{d}t$$

   (d) Déterminer $\mathbb{P}(X \geqslant n)$ sous une forme intégrale lorsque $n \geqslant 1$. Que vaut $\mathbb{P}(X \geqslant 0)$?

5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$. On pose pour tout entier n non nul,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

et on admettra que $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$.

(a) Montrer que la variable alétoire $\dfrac{S_n}{n}$ admet une variance et la calculer.

(b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout entier n non nul,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \lambda + \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$$

(c) Rappeler l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire X positive d'espérance finie.

(d) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$ et $x > 0$.

i. Montrer que pour tout $\theta > 0$, on a

$$(X \geqslant x) = \left(\mathrm{e}^{\theta X} \geqslant \mathrm{e}^{\theta x}\right)$$

ii. Justifier que la variable aléatoire $\mathrm{e}^{\theta X}$ est d'espérance finie et montrer que

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta X}\right) = \mathrm{e}^{\mu(\mathrm{e}^{\theta}-1)}.$$

iii. Montrer que

$$\mathbb{P}(X \geqslant x) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta X}\right)}{\mathrm{e}^{\theta x}}$$

iv. En déduire que

$$\mathbb{P}(X \geqslant x) \leqslant \inf_{\theta>0} \frac{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta X}\right)}{\mathrm{e}^{\theta x}}$$

v. En déduire que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \lambda + \varepsilon\right) \leqslant \inf_{\theta>0} \mathrm{e}^{n\lambda\mathrm{e}^{\theta} - n(\lambda+\varepsilon)\theta}$$

vi. Montrer qu'il existe une constante $a > 0$ (dépendant de λ et ε uniquement) telle que pour tout entier n non nul

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \lambda + \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-na}$$

On étudiera les variations de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(\theta) = n\lambda\mathrm{e}^{\theta} - n(\lambda+\varepsilon)\theta$$

Comparer avec l'inégalité obtenue à la question b).

Fin

I : Loi de Poisson

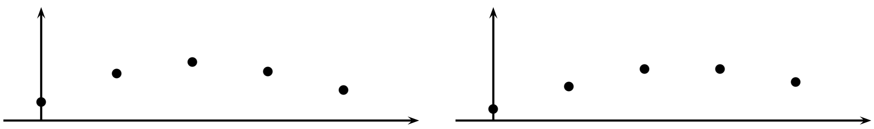
1. On rapelle que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = n+1) \leqslant \mathbb{P}(X = n) &\iff \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+1}}{n!} \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\ &\iff \frac{\lambda}{n+1} \leqslant 1 \iff \lambda \leqslant n+1\end{aligned}$$

On a $\mathbb{P}(X = n+1) = \mathbb{P}(X = n)$ et seulement si $\lambda = n+1$; cela est possible lorsque λ est un entier non nul et avec donc $n = \lambda - 1$.

On en déduit les variations de la suite $(\mathbb{P}(X = n))_{n\in\mathbb{N}}$: elle croit strictement lorsque $n < \lambda$, puis éventuellement stagne pour $n = \lambda - 1, \lambda$ si λ entier, et sinon décroit strictement ensuite.

A.N. : pour $\lambda = 2,5$ et $\lambda = 3$:



3. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\operatorname{ch}(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda}}{2} = \frac{1 + \mathrm{e}^{2-\lambda}}{2} \geqslant \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(I) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\operatorname{sh}(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}}{2} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2\lambda}}{2} \leqslant \frac{1}{2}\end{aligned}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) On a

$$\mathbb{P}(X \leqslant n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}$$

   (b) On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction exponentielle qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$, sur le segment $[0, \lambda]$, à l'ordre n, sachant que les dérivées de l'exponentielle sont égales à elle-même

$$\mathrm{e}^{\lambda} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda - 0)^k}{k!} + \int_0^{\lambda}\frac{(\lambda - t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$

On effectue le changement de variable $u = \lambda - t = \varphi(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$,

$$\mathrm{e}^\lambda = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} - \int_\lambda^0 \frac{u^n}{n!}\mathrm{e}^{\lambda-u}\mathrm{d}u$$

soit finalement

$$\mathrm{e}^\lambda = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^\lambda \frac{u^n}{n!}\mathrm{e}^{\lambda-u}\mathrm{d}u$$

(c) Ainsi

$$\mathbb{P}(X \leqslant n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\left[\mathrm{e}^\lambda - \int_0^\lambda \frac{u^n}{n!}\mathrm{e}^{\lambda-u}\mathrm{d}u\right]$$

d'où (la variable u est muette)

$$\mathbb{P}(X \leqslant n) = 1 - \int_0^\lambda \frac{\mathrm{e}^{-t}t^n}{n!}\mathrm{d}t$$

(d) On a alors si $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(X \geqslant n) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant n-1) = \int_0^\lambda \frac{\mathrm{e}^{-t}t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}t$$

On a aussi $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$. On pose pour tout entier n non nul,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

et on admettra que $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$.

(a) Comme S_n suit une loi de Poisson, elle admet une variance et on a $\mathbb{V}(S_n) = n\lambda$. Ainsi $\frac{S_n}{n}$ admet aussi une variance et on a

$$\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(S_n) = \frac{\lambda}{n}$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$, et n entier non nul, on sait que

$$\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \lambda + \varepsilon\right) \subset \left(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| \geqslant \varepsilon\right)$$

d'où l'inégalité de gauche. D'autre part, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, appliqué à $\frac{S_n}{n}$ d'espérance $\frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) = \lambda$, et la précision d'écartement ε, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$$

Donc finalement

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \lambda + \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$$

(c) Soi X une variable aléatoire X positive d'espérance finie, pout tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$$

(d) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$ et $x > 0$.

i. Soit $\theta > 0$, on a si $\omega \in \Omega$, puisque la fonction exponentielle est strictement croissante et $\theta > 0$,

$$X(\omega) \geqslant x \iff \mathrm{e}^{\theta X(\omega)} \geqslant \mathrm{e}^{\theta x}$$

ou

$$X \leqslant x \iff \mathrm{e}^{\theta X} \leqslant \mathrm{e}^{\theta x}$$

et donc

$$(X \geqslant x) = \left(\mathrm{e}^{\theta X} \geqslant \mathrm{e}^{\theta x}\right)$$

ii. On considère la variable aléatoire $\mathrm{e}^{\theta X}$. On étudie la convergence absolue de la série numérique

$$\sum_{n \geqslant 0} \mathrm{e}^{\theta n} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n \geqslant 0} \mathrm{e}^{\theta n} \mathrm{e}^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\mu} \sum_{n \geqslant 0} \frac{(\mu \mathrm{e}^{\theta})^n}{n!}$$

qui est (absolument car à termes positifs) convergente, de somme

$$\mathrm{e}^{-\mu} \mathrm{e}^{\mu \mathrm{e}^{\theta}} = \mathrm{e}^{\mu(\mathrm{e}^{\theta} - 1)}$$

Ainsi par le théorème de transfert, $\mathrm{e}^{\theta X}$ est d'espérance finie et on a

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta X}\right) = \mathrm{e}^{\mu \mathrm{e}^{\theta} - \mu}.$$

iii. On a

$$\mathbb{P}(X \geqslant x) = \mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{\theta X} \geqslant \mathrm{e}^{\theta x}\right)$$

En appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $\mathrm{e}^{\theta X}$ est à la précision $\mathrm{e}^{\theta x}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{\theta X} \geqslant \mathrm{e}^{\theta x}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta X}\right)}{\mathrm{e}^{\theta x}}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(X \geqslant x) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta X}\right)}{\mathrm{e}^{\theta x}}$$

iv. On en déduit que $\mathbb{P}(X \geqslant x)$ minore l'ensemble

$$\left\{ \frac{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta X}\right)}{\mathrm{e}^{\theta x}}, \theta > 0 \right\}$$

et ainsi est plus petit que sa borne inférieure (la borne inférieure est le plus grand des minorants), soit

$$\mathbb{P}(X \geqslant x) \leqslant \inf_{\theta > 0} \frac{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta X}\right)}{\mathrm{e}^{\theta x}}$$

v. La variable aléatoire S_n suit une loi de Poisson de paramètre λn, et ainsi d'après la question précédente, appliqué à $x = n(\lambda + \varepsilon) > 0$, on a

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant n(\lambda + \varepsilon)) \leqslant \inf_{\theta > 0} \frac{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta S_n}\right)}{\mathrm{e}^{\theta n(\lambda + \varepsilon)}}$$

avec

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta S_n}\right) = \mathrm{e}^{n\lambda \mathrm{e}^{\theta} - n\lambda}$$

et ainsi finalement

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant n(\lambda + \varepsilon)) \leqslant \inf_{\theta > 0} \mathrm{e}^{n\lambda \mathrm{e}^{\theta} - n\lambda - n(\lambda + \varepsilon)\theta}$$

vi. On étudie les variations de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(\theta) = n\lambda \mathrm{e}^{\theta} - n(\lambda+\varepsilon)\theta$$

La fonction f est dérivable et on a

$$f'(\theta) = n\lambda \mathrm{e}^{\theta} - n(\lambda+\varepsilon)$$

On en déduit les variations de f sur $[0,+\infty[$:

θ	0		$\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)$		0
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-na'$	$\nearrow$	

La valeur minimale de f est donc

$$\begin{aligned} f\left(\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)\right) &= n(\lambda+\varepsilon) - n(\lambda+\varepsilon)\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \\ &= n(\lambda+\varepsilon)\left(1-\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)\right) = na' \end{aligned}$$

Ainsi pour $a = a' + \lambda > 0$, pour tout entier n non nul on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \lambda+\varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-na}$$

Comparons avec l'inégalité obtenue à la question b) : on avait obtenu

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leqslant \lambda+\varepsilon\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

On obient ici mieux (beaucoup) avec

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leqslant \lambda+\varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-na} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$