# Quinzaine 9 du 02/02 au 30/02

**Chapitre 8 :** *Intégration sur un intervalle quelconque*
Suites et séries de fonctions intégrables.
Théorème de convergence dominée :
Si $(f_n)$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle $I$ convergeant simplement sur $I$ vers une fonction $f$ continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction $\varphi$ continue par morceaux et intégrable sur $I$ vérifiant $|f_n| \leqslant \varphi$ pour tout $n$, alors les fonctions $(f_n)$ et $f$ sont intégrables sur $I$ et :

$$\int_I f_n(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration hors programme.
L'hypothèse de continuité par morceaux de $f$, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

Intégrales à paramètre.
Théorème de continuité :
Si $A$ et $I$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $A \times I$ telle que : – pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $A$ ;
– pour tout $x$ de $A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $I$ ;
– il existe une fonction $\varphi$ positive, continue par morceaux et intégrable sur $I$, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait

$$|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $A$.
Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de $A$ ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Théorème de convergence dominée à paramètre continu :
Si $A$ et $I$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, $a$ une borne de $A$ et $f$ une fonction définie sur $A \times I$ telle que :
– pour tout $t \in I$, $f(x,t) \longrightarrow_{x\to a} \ell(t)$
– pour tout $x$ de $A$, $t \mapsto f(x,t)$ $\quad t \mapsto \ell(t)$ sont continue par morceaux sur $I$ ;
– il existe une fonction $\varphi$ positive, continue par morceaux et intégrable sur $I$, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait

$$|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

alors la fonction $t \mapsto \ell(t)$ est intégrable sur $I$ et

$$\int_I f(x,t)\mathrm{d}t \underset{x\to a}{\longrightarrow} \int_I \ell(t)\mathrm{d}t$$

Théorème de dérivation : Si $A$ et $I$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $A \times I$, telle que :
– pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $A$ ;
– pour tout $x$ de $A$,$t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $I$ et intégrable sur $I$ ;
– pour tout $x$ de $A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $I$ ;

– il existe une fonction $\varphi$ positive, continue par morceaux et intégrable sur $I$, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \varphi(t)$$

alors la fonction $g$ définie par

$$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $A$ et on a sur $A$

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, sous hypothèse de domination de $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t$. et d'intégrabilité des $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\mathrm{d}t$ pour $0 \leqslant j < k$.
Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de $A$ ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

**Chapitre 9 :** *Réduction*
Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.
Exemples raisonnables de recherches de valeurs propres et de vecteurs propres à partir de la définition : équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$ ; équation aux éléments propres $AX = \lambda X$.
Si $u$ et $v$ commutent, les sous-espaces propres de $u$ sont stables par $v$.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice carrée.
La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe (*).
Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Si $u(x) = \lambda x$, alors $(u^k)(x) = \lambda^k x$ et pour tout polynôme $P$, $P(u)(x) = P(\lambda)x$ (*).
Soit $P$ un polynôme annulateur de $u$ ; si $\lambda$ est valeur propre de $u$, alors $\lambda$ est racine de $P$ (réciproque fausse).

**Questions de cours :**

— Les énoncés des définitions, des théorèmes.
— Les démonstrations marquées par (*).
— Les méthodes usuelles sur des exemples.