Devoir n°6

Exercice A

On pose si $x > 1$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{sh}(t)}{t}\mathrm{d}t$$

On pose pour $x \in]1, +\infty[$, $t \in]0, +\infty[$

$$f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{sh}(t)}{t}$$

1. Montrer que F est bien définie sur $]1, +\infty[$.
2. Montrer que F est décroissante sur $]1, +\infty[$, positive, et en déduire que F admet une limite ℓ en $+\infty$, que l'on ne cherchera pas à déterminer pour l'instant.
3. On souhaite appliquer le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ pour les intégrales à paramètre.
   (a) Montrer que si $x > 1$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
   (b) Montrer que si $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.
   (c) Vérifier que pour tout $x > 1$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux.
   (d) Soit $[a,b]$ un segment de $]1, +\infty[$. Montrer que

   $$\forall x \in [a,b]\,,\ \forall t \in]0, +\infty[\,,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{sh}(t)$$

   (e) En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$, et que

   $$\forall x > 1\,,\ F'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)$$

   (f) Montrer que si $x \geqslant 2$, on a si $t > 0$,

   $$|f(x,t)| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{sh}(t)}{t}$$

   et en déduire la limite ℓ de F en $+\infty$.
4. En déduire que

$$\forall x > 1\,,\ F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$$

Exercice B

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice dite de Frobenius. On pose aussi

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} \ , \ (x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \right\}$$

On $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. On rappelle à toute fin utile que les racines cubiques de l'unité sont $1, j, j^2$ avec $j^2 = \overline{j} = \dfrac{1}{j}$, $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$.

1. (*) Calculer F^2 et montrer que
$$\mathcal{E} = \{xI + yF + zF^2 \ , \ (x,y,z) \in \mathbb{C}^3\}$$
2. (*) En déduire que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dont on donnera une base et la dimension.
3. (*) Calculer F^3 et en déduire que le produit de deux éléments de $\mathcal{E}$ commute et reste dans $\mathcal{E}$.
4. (*) Montrer que
$$\chi_F(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - j)(\lambda - j^2)$$
5. (*) En déduire que F est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, et qu'il existe une matrice complexe P inversible telle que $F = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(1, j, j^2)$. On ne demande pas ici de préciser la matrice P.
6. (*) Montrer que F^2 est aussi diagonalisable et exprimer F^2 à l'aide de P et D.
7. (**) En déduire que tous les éléments $A = xI_3 + yF + zF^2$ de $\mathcal{E}$ sont diagonalisables dans une même base et préciser une matrice diagonale semblable à A.
8. (*) En déduire une expression factorisée du déterminant de $A = xI_3 + yF + zF^2$, puis donner une condition nécessaire et suffisante pour la matrice A soit inversible.
9. (*) Déterminer les espaces propres de F et en déduire que l'on peut choisir pour P la matrice
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$
10. Soit A un élément de $\mathcal{E}$ inversible. On établit dans cette question que $A^{-1} \in \mathcal{E}$, sans calculer A^{-1}.
    (a) (*) Montrer que l'application
    $$\begin{aligned} \Phi : \ \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ M &\longmapsto AM \end{aligned}$$
    est un endomorphisme.
    (b) (**) Montrer que Φ est un automorphisme.
    (c) (*) En déduire que $A^{-1} \in \mathcal{E}$.