Devoir surveillé n°6
3 heures

EXERCICE 1

On suppose que X_1, X_2,..., X_n sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On définit les matrices aléatoires :

$$U = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \qquad M = U \times U^T = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1X_2 & X_1X_3 & \cdots & \cdots & X_1X_n \\ X_2X_1 & X_2^2 & X_2X_3 & \cdots & \cdots & X_2X_n \\ X_3X_2 & X_3X_2 & X_3^2 & \cdots & \cdots & X_3X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_nX_1 & X_nX_2 & X_nX_3 & \cdots & \cdots & X_n^2 \end{pmatrix}$$

1. On pose $Y = \mathrm{rg}(M)$. Déterminer l'image de Y et en déduire que Y suit une loi de Bernoulli de paramèrtre $1-(1-p)^n$.
2. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $\mathrm{Tr}(M)$.
3. Vérifier que $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$ et en déduire la probabilité de l'événement « M est une matrice de projection ».
4. Dans cette question, on suppose que X_1, X_2,..., X_n sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit la matrice aléatoire M comme ci-dessus. Avec ces nouvelles hypothèses, calculer à nouveau la probabilité de l'événement « M est une matrice de projection ».

PROBLÈME

Notations et définitions

— $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbf{R}$ celui des nombres réels.

— Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, on note $\mathbf{E}(X)$ cette espérance.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $[-1, 1]$. On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, *mutuellement indépendantes et de même loi que* X. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

On admet que S_n est une variable aléatoire discrète.

Objectif

Montrer que si la variable aléatoire X est centrée, c'est à dire si $\mathbf{E}(X) = 0$), alors la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

Q1. Montrer que si Y est une variable aléatoire bornée, alors elle admet une espérance. En déduire que Y^2 admet aussi une epérance.

On ne suppose pas X centrée dans cette question. Montrer que X admet une espérance. Montrer que X^2 aussi admet une espérance.

On suppose désormais que X est *centrée.*

Q2. Soit $\varepsilon > 0$, justifier que S_n admet une variance et une espérance, et les déterminer, et montrer que

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{n\varepsilon^2}$$

En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) = 0$$

On dit que (S_n) converge vers 0 en probabilité (cas particulier de la loi faible des grands nombres).

Q3. Montrer que $|X|$ admet une espérance et que, pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathbf{P}\left(|X| \geqslant \alpha\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}\left(|X|\right)}{\alpha}.$$

Q4. Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\mathbf{P}\left(S_n \geqslant \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\mathrm{e}^{tnS_n} \geqslant \mathrm{e}^{tn\varepsilon}\right) \leqslant \frac{\left(\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\right)^n}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}.$$

On justifiera l'existence des espérances.

Q5. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par

$$\forall x \in \mathbf{R},\ g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que la fonction g_a' est décroissante sur $\mathbf{R}$. Vérifier que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, et en déduire que g_a' s'annule entre -1 et 1. En déduire que pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geqslant 0$.

Q6. En déduire que

$$\forall t > 0,\ \forall x \in [-1,1],\ \mathrm{e}^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t}.$$

Q7. En déduire que

$$\forall t > 0,\ \mathrm{e}^{tX} \leqslant \frac{1-X}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+X}{2}\mathrm{e}^{t}$$

puis que

$$\forall t > 0,\ \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \leqslant \operatorname{ch} t.$$

Q8. Montrer que

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \forall t \in \mathbf{R},\ \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

En déduire que

$$\forall t > 0,\ \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}.$$

Majoration de $\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

Q9. Montrer que la fonction $\mathbf{R} \ni t \longmapsto \mathrm{e}^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$ atteint un minimum en un point que l'on précisera.

Q10. En déduire que $\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-n\varepsilon^2/2}$, puis que

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\mathrm{e}^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Conclusion

Q11. Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge.

Q12. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{m \geqslant n} \left\{\omega \in \Omega\ ;\ |S_m(\omega)| > \varepsilon\right\}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $\varepsilon > 0$, $B_n(\varepsilon)$ est un événement.

Montrer que la suite $(B_n(\varepsilon))$ est décroissante, et que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = 0$.

Q33. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, posons

$$\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega\ ;\ \exists n \in \mathbf{N}^*,\ \forall m \geqslant n,\ |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\}.$$

Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, Ω_k est un événement.

Écrire l'ensemble $A = \left\{\omega \in \Omega\,;\ \lim_{n\to\infty} S_n(\omega) = 0\right\}$ à l'aide des événements Ω_k, $k \in \mathbf{N}^*$. En déduire que A est un événement.

Q14. Déduire des questions précédentes que $\mathbf{P}(A) = 1$ et conclure.

Fin

Exercice

Q1. Soit $\omega \in \Omega$. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $M(\omega)$ est égale à $X_j(\omega)U(\omega)$, donc le sous-espace vectoriel de $M_{n,1}(\mathbf{R})$ engendré par les colonnes de $M(\omega)$ est inclus dans $\operatorname{Vect}(U(\omega))$; ainsi $Y(\omega) = \operatorname{rg}(M(\omega)) \in \{0,1\}$. Cela montre que Y est une variable aléatoire de Bernoulli.
Si $U(\omega)$ est le vecteur nul, alors $M(\omega)$ est la matrice nulle de $M_n(\mathbf{R})$ et $Y(\omega) = 0$.
Si $U(\omega)$ n'est pas nul, il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $X_i(\omega) \neq 0$, donc le $i^{\text{ème}}$ élément diagonal de $M(\omega)$, à savoir $X_i(\omega)^2$, est non nul : la matrice $M(\omega)$ est non nulle, donc $Y(\omega) > 0$ et nécessairement $Y(\omega) = 1$.
Ainsi l'événement $\{Y = 0\}$ est égal l'événement $\{U = 0_{n,1}\}$, c'est-à-dire l'intersection $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = 0\}$; par indépendance mutuelle de $(X_1, \ldots, X_n)$ on obtient

$$\mathbb{P}(Y=0) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = 0) = (1-p)^n \qquad \text{d'où} \qquad \mathbb{P}(Y=1) = 1-\mathbb{P}(Y=0) = 1-(1-p)^n$$

autrement dit, Y suit la loi de Bernoulli de paramètre $1-(1-p)^n$.

Q2. Pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $i \in [\![1,n]\!]$ on a $X_i(\omega) \in \{0,1\}$ car X_i est une variable aléatoire de Bernoulli, donc $X_i(\omega)^2 = X_i(\omega)$; par conséquent

$$\operatorname{Tr}(M(\omega)) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)$$

donc $\operatorname{Tr}(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. En tant que somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p,

$\operatorname{Tr}(M)$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Q3. On fixe $\omega \in \Omega$: on a

$$M(\omega)^2 = \left(U(\omega) \times U(\omega)^\top\right)^2 = U(\omega) \times \left(U(\omega)^\top \times U(\omega)\right) \times U(\omega)^\top$$

Or $U(\omega)^\top \times U(\omega) \in M_1(\mathbf{R})$ est assimilée au réel $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)^2 = \operatorname{Tr}\left(M(\omega)\right)$; il en suit que

$$M(\omega)^2 = \operatorname{Tr}\left(M(\omega)\right)\left(U(\omega) \times U(\omega)^\top\right) = \operatorname{Tr}\left(M(\omega)\right) M(\omega).$$

Cela établit que les variables aléatoires M^2 et $\operatorname{Tr}(M)M$ sont égales.
$M(\omega)$ est une matrice de projection si et seulement si

$$M(\omega)^2 = M(\omega) \iff \operatorname{Tr}\left(M(\omega)\right) M(\omega) = M(\omega) \iff M(\omega) = 0_n \text{ ou } \operatorname{Tr}\left(M(\omega)\right) = 1$$

donc l'événement $\left\{M^2 = M\right\}$ est la réunion des événements $\{M = 0_n\}$ et $\{\operatorname{Tr}(M) = 1\}$, qui sont incompatibles. La loi de $\operatorname{Tr}(M)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$; l'événement $\{M = 0_n\}$ est égal à $\{\operatorname{rg}(M) = 0\}$ et la loi de $Y = \operatorname{rg}(M)$ a été déterminée ; par additivité finie de $\mathbb{P}$, on obtient

$$\mathbb{P}(M^2 = M) = \mathbb{P}(M = 0_n) + \mathbb{P}(\operatorname{Tr}(M) = 1) = \mathbb{P}(Y=0) + \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$$

$$\boxed{\text{La probabilité de l'événement «}M\text{ est une matrice de projection» est égale à } (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}.}$$

Q4. Les calculs d'événements faits restent valables, on doit toutefois recalculer leurs probabilités en tenant compte des nouvelles hypothèses sur $(X_1, \dots, X_n)$. Ainsi l'événement considéré $\left\{M^2 = M\right\}$ est toujours égal la réunion des événements incompatibles $\{M = 0_n\}$ et $\{\mathrm{Tr}(M) = 1\}$, donc $\mathbb{P}(M^2 = M) = \mathbb{P}(M = 0_n) + \mathbb{P}(\mathrm{Tr}(M) = 1)$. On a

$$\{M = 0_n\} = \{Y = 0\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = 0\}$$

d'où

$$\mathbb{P}(M = 0_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = 0) = \left(\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!}\right)^n = \mathrm{e}^{-n\lambda}$$

car $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. En utilisant la distribution conjointe de $(X_1, \dots, X_n)$ pour exprimer la distribution de probabilité de $\mathrm{Tr}(M)$ on obtient

$$\mathbb{P}(\mathrm{Tr}(M) = 1) = \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 1\Big) = \sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{N}^n \\ x_1^2+\dots+x_n^2=1}} \mathbb{P}\big((X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)\big)$$

Pour tout n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ d'entiers naturels, l'égalité $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ est satisfaite si et seulement s'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_k = 1$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!] \smallsetminus \{k\}$ on a $x_i = 0$; en utilisant l'indépendance de $X_1, \dots, X_n$ et leur loi commune $\mathcal{P}(\lambda)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{Tr}(M) = 1) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\Big(\{X_k = 1\} \cap \bigcap_{i\neq k} \{X_i = 0\} \Big) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = 1) \prod_{i\neq k} \mathbb{P}(X_i = 0) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} (\mathrm{e}^{-\lambda})^{n-1} = n\lambda \mathrm{e}^{-n\lambda}
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\mathbb{P}(M^2 = M) = \mathrm{e}^{-n\lambda} + n\lambda \mathrm{e}^{-n\lambda}}$

Problème

Q1. Si Y est une variable aléatoire bornée, il existe une constante B de sorte que $|Y| \leqslant B$, et comme B admet une espérance, Y aussi.
Comme Y^2 est aussi bornée, Y^2 admet aussi une epérance.

Si X est quelconque, pas forcément centrée, comme X st bornée, X et X^2 admettent une espérance.

Q2. Soit $\varepsilon > 0$, par linéarité, S_n admet une espérance et on a

$$\mathbf{E}(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i) = \mathbf{E}(X) = 0$$

Comme X_1, ..., X_n admettent une variance, la somme aussi, et par propriété puis indépendance

$$\mathbf{V}(S_n) = \frac{1}{n^2}\mathbf{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{n\,\mathbf{V}(X)}{n^2} = \frac{\mathbf{V}(X)}{n}.$$

Ainsi, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev,

$$\mathbf{P}(|S_n - 0| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{n\varepsilon^2}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) = 0$$

On dit que (S_n) converge vers 0 en probabilité (cas particulier de la loi faible des grands nombres).

Q3. On $|X|$ bornée, donc $|X|$ admet une espérance et on a, pour tout $\alpha > 0$ par l'inégalité de Markov,

$$\mathbf{P}\left(|X| \geqslant \alpha\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}\left(|X|\right)}{\alpha}.$$

Q4. Soit $t > 0$, $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$S_n \geqslant \varepsilon \iff tnS_n \geqslant tn\varepsilon \iff \mathrm{e}^{tnS_n} \geqslant \mathrm{e}^{tn\varepsilon}$$

On considère alors la variable aléatoire e^{tnS_n}, positive, avec $tnS_n = tn(X_1 + \cdots + X_n)$, bornée, et donc e^{tnS_n} aussi et donc admet une espérance, et comme

$$\mathrm{e}^{tnS_n} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{tX_i}$$

produit de variables aléatoires indépendantes puisque $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes, et donc $f(X_1), \ldots, f(X_n)$ aussi avec $f(u) = \mathrm{e}^{tu}$, et

$$\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tnS_n}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(\right)\mathrm{e}^{tX_i}\big) = \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)^n$$

et en appliquant Markov

$$\mathbf{P}\left(S_n \geqslant \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\mathrm{e}^{tnS_n} \geqslant \mathrm{e}^{tn\varepsilon}\right) \leqslant \frac{\left(\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\right)^n}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}.$$

Q5. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par

$$\forall x \in \mathbf{R},\ g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - \mathrm{e}^{x\ln(a)}$$

La fonction g_a est dérivable sur $\mathbf{R}$ par opérations et on a

$$g_a'(x) = -\frac{1}{2}a^{-1} - \ln(a)\mathrm{e}^{x\ln(a)}$$

avec $\ln(a) > 0$, et donc g_a' est décroissante sur $\mathbf{R}$. On a

$$g_a(-1) = a^{-1} - a^{-1} = 0 \qquad g_a(1) = a - a = 0$$

et ainsi en appliquant le théorème de Rolle à g_a sur $[-1,1]$, g_a continue et dérivable sur $]-1,1[$, g_a' s'annule entre -1 et 1 en x_0.

On en déduit que pour tout $x \in [-1,1]$, $g_a(x) \geqslant 0$.

Q6. On applique la question précédente à $a = \mathrm{e}^{tx}$ avec $a > 1$ puisque $tx > 0$: on obtient

$$\forall t > 0,\ \forall x \in [-1,1],\ \mathrm{e}^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t}.$$

Q7. Soit $t > 0$, comme X prend ses valeurs dans $[-1,1]$, on en déduit que

$$\forall t > 0,\ \mathrm{e}^{tX} \leqslant \frac{1-X}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+X}{2}\mathrm{e}^{t}$$

puis par positivité de l'espérance et la linéarité, sachant que $\mathbf{E}(X) = 0$,

$$\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2}\,\mathbf{E}(X) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}\,\mathbf{E}(X) = \mathrm{ch}(t)$$

soit

$$\forall t > 0,\ \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \leqslant \mathrm{ch}\, t.$$

Q8. Soit $k \in \mathbf{N}^*$, on

$$\frac{k!2^k}{(2k)!} = \frac{2}{2k}\cdots\frac{2}{k+1} \leqslant 1$$

et ainsi $\dfrac{1}{(2k)!} \leqslant \dfrac{1}{k!2^k}$, vrai aussi si $k = 0$, et donc

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \forall t \in \mathbf{R},\ \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

On en déduit que

$$\mathrm{ch}\, t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k = \mathrm{e}^{t^2/2}$$

et donc

$$\forall t > 0,\ \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \leqslant \mathrm{ch}\, t \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}.$$

Majoration de $\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

Q9. La fonction $f : t \longmapsto \mathrm{e}^{-nt\varepsilon+nt^2/2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$f'(t) = (nt - n\varepsilon)f(t)$$

et ainsi elle atteint un minimum en $t = \varepsilon$, qui est

$$f(\varepsilon) = \mathrm{e}^{-n\varepsilon^2/2}$$

Q10. Avec Q4 et Q8, on a si $t > 0$,

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathrm{e}^{nt^2/2-tn\varepsilon}$$

et avec $t = \varepsilon$, $\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-n\varepsilon^2/2}$.
On procède alors de manière symétrique pour $(S_n \geqslant -\varepsilon)$ qui est aussi $(-S_n \geqslant \varepsilon)$, sachant que $-S_n$ possède les mêmes propriétés que S_n (ou avec $-X$). On obtient aussi

$$\mathbf{P}(S_n \leqslant -\varepsilon) \leqslant \mathrm{e}^{nt^2/2-tn\varepsilon}$$

On en déduit alors sachant que $(|S_n| \geqslant \varepsilon) = (S_n \geqslant \varepsilon) \cup (s_n \leqslant -\varepsilon)$ (disjointe mais pas nécessaire) que

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\mathrm{e}^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Conclusion

Q11. La croissance des mesures de probabilité et la question 40 donnent la majoration

$$\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Le théorème de comparaison et la convergence de la série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} \in]0,1[$ assurent alors la convergence de la série de terme général $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon)$.

Q12. $\{\omega \in \Omega\,;\ |S_m(\omega)| > \varepsilon\} = S_m^{-1}(]-\infty,-\varepsilon[) \cup S_m^{-1}(]\varepsilon,+\infty[)$ est la réunion de deux événements, donc un événement. Alors, B_n est une réunion dénombrable d'événements, donc un événement.
Par ailleurs, $\mathbf{P}(B_n) \leqslant \displaystyle\sum_{m=n}^{\infty} \mathbf{P}\left(\{\omega \in \Omega\,;\ |S_m(\omega)| > \varepsilon\}\right)$, reste d'une série convergente d'après la question précédente. Comme la suite $(B_n)_n$ est décroissante, il s'ensuit

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_n) = 0.$$

Q33. Posons pour plus de clarté $B_n(\varepsilon) = B_n$. On peut écrire

$$\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega\,;\ \exists n \in \mathbf{N}^*,\ \forall m \geqslant n\colon |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\left\{\omega \in \Omega\,;\ |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\}$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B_n(1/k)}$$

donc Ω_k est une réunion dénombrable d'événements et donc un événement. On peut par ailleurs écrire

$$A = \left\{\omega \in \Omega\,;\ \forall k \in \mathbf{N}^*,\ \exists n \in \mathbf{N}^*,\ \forall m \geqslant n\colon |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\} = \bigcap_{k\in\mathbf{N}^*} \Omega_k,$$

ce qui montre que A est un événement.

Q14. En reprenant l'expression de Ω_k obtenue, le passage au complémentaire donne $\overline{\Omega_k} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} B_n(1/k)$ et en appliquant ce que l'on a montré précédemment, on obtient $\mathbf{P}\left(\overline{\Omega_k}\right) = 0$, d'où $\mathbf{P}(\Omega_k) = 1$.
Enfin, $\left(|S_m| \leqslant \dfrac{1}{k}\right) \supset \left(|S_m| \leqslant \dfrac{1}{k+1}\right)$, ce qui entraîne que la suite d'événements $(\Omega_k)_k$ est décroissante. On peut alors conclure :

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbf{N}^*} \Omega_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(\Omega_k) = 1.$$

Autrement dit, $(S_n)_n$ converge presque sûrement vers 0. Ce résultat est la *loi forte des grands nombres.*