qu'il existe une constante α réelle telle

Devoir surveillé n°6
3 heures

EXERCICE 1

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes, sur un espace propabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Donner la formule liant G_{X+Y} à G_X et G_Y.
2. On rappelle que par la formule de transfert, si $t \in [-1, 1]$,

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{E}(t^X)$$

En déduire une preuve de la formule citée ci-dessus donnant G_{X+Y} en fonction de G_X et G_Y.

EXERCICE 2

On souhaite étudier la loi de X définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*\, ,\, \mathbb{P}(X = k) = \frac{k-1}{2^k} \qquad (E)$$

si cela à un sens.

1. Montrer que sur $]-1, 1[$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \qquad \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^k$$

En déduire que (E) définit bien une loi d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

2. Montrer que pour $t \in]-R, R[$, on a

$$G_X(t) = \frac{t^2}{(2-t)^2}$$

avec R à préciser.

3. En déduire que X admet une espérance et la calculer.
4. La variable aléatoire X admet-elle une variance ? Comment la calculer ?

EXERCICE 3

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.

On note $G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X = n)t^n$ la fonction génératrice de X.

L'objectif de cet exercice est d'affiner une majoration donnée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à une loi de Poisson.

Q1. Sans démonstration, donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

Q2. En utilisant une inégalité adaptée, donner une majoration de $\mathrm{P}(|X - \lambda| \geqslant \lambda)$.

Q3. Justifier parfaitement que l'événement $\{X \geqslant 2\lambda\}$ est inclus dans l'événement $\{|X - \lambda| \geqslant \lambda\}$.

Q4. En déduire la majoration suivante :

$$\mathrm{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}. \tag{1}$$

Q5. Donner l'ensemble de définition de G_X.

Q6. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}, G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

Q7. On suppose que $t \geqslant 1$. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $(X \geqslant \alpha) = \left(t^X \geqslant t^\alpha\right)$ puis que l'on a :

$$\mathrm{P}(X \geqslant \alpha) \leqslant \frac{G_X(t)}{t^\alpha}.$$

Q8. En déduire que :

$$\mathrm{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda. \tag{2}$$

On étudiera une fonction et on déterminera son minimum.

Q9. On admet que $e \cdot (\ln(4) - 1) \geqslant 1,05$. Quelle majoration (1) ou (2) de $\mathrm{P}(X \geqslant 2\lambda)$ est la plus précise ?
On sera ramené à une étude de fonction.

PROBLEME

On suppose que les variables aléatoires sont toutes définies sur le même espace probabilisé et prennent des valeurs entières.

On appelle fonction caractéristique d'une variable aléatoire X l'application $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi_X(t) = E\left(\mathrm{e}^{itX}\right)$$

sous condition d'existence.

1. Justifier que φ_X est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{itk} P(X = k)$.
2. Montrer que φ_X est 2π-périodique et continue.

3. Calculer $\varphi_X(0)$.
4. On suppose que X admet une espérance. Montrer que φ_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser φ_X'. Interpréter $\varphi_X'(0)$.
5. On suppose que X admet une variance. Montrer que φ_X est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et préciser φ_X''. Interpréter $\varphi_X''(0)$.
6. On suppose dans cette question que X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Déterminer φ_X.
7. On suppose dans cette question que X suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Déterminer φ_X. On prendra soin de simplifier au maximum les expressions. Que remarque-t-on ?
8. Et si X suit une loi géométrique ? de Poisson ?
9. Soit X une variable aléatoire quelconque et k un entier. Montrer que

$$P(X=k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_X(t)\mathrm{e}^{-itk}\mathrm{d}t$$

   On calculera déjà

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{iu(p-q)}\mathrm{d}u$$

   pour p et q des entiers relatifs.

   En déduire que $\varphi_X = \varphi_Y \Longrightarrow P_X = P_Y$.
10. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que

$$\varphi_{X+Y} = \varphi_X.\varphi_Y$$

   et retrouver la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale.

Fin

Exercice 1

1. On rappelle que si X et Y sont indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $G_{X+Y} = G_X.G_Y$ sur $[-1,1]$ de façon générale.
2. Si $t \in [-1,1]$, par la formule de transfert, on a
$$G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(t^{X+Y}) = \mathbb{E}(t^X.t^Y)$$
Or les variables aléatoires t^X et t^Y sont de la forme $f(X)$ et $f(Y)$ avec $f(u) = t^u$, et donc elles sont aussi indépendantes et ainsi, comme elles admettent une espérance, $t^X.t^Y$ aussi (on le sait en fait) et on a
$$\mathbb{E}(t^X.t^Y) = \mathbb{E}(t^X).\mathbb{E}(t^Y)$$
et ainsi on retrouve
$$G_{X+Y}(t) = G_X(t).G_Y(t).$$

Exercice 2

1. On rappelle que si $x \in]-1,1[$,
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$
que l'on dérive terme à terme (série entière
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$$
et ainsi
$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^k$$
Si $k \geqslant 1$, $\dfrac{k-1}{2^k} \geqslant 0$ et on a
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \frac{k-1}{2^k} &= \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{2^k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k}\\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 1\\ &= 2-1 = 1\end{aligned}$$
On a ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} = 1$ et ainsi nous avons bien une loi d'une variable aléatoire.
2. On a déjà par la règle d'Abel appliquée aux séries entières, puisque
$$\frac{\frac{k}{2^{k+1}}}{\frac{k-1}{2^k}} = \frac{k}{2(k-1)} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

le rayon de $\sum \frac{k-1}{2^k} t^k$ qui est égal à 2. Pour $t \in]-1, 2[$, nous avons (la séparation est bien licite sur $]2, 2[$)

$$\begin{aligned}
G_X(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} t^k && (1)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{t}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^k && (2)\\
&= \frac{\frac{t}{2}}{\left(1-\frac{t}{2}\right)^2} - \frac{\frac{t}{2}}{1-\frac{t}{2}} && (3)\\
&= \frac{2t}{(2-t)^2} - \frac{t}{2-t} == \frac{2t - t(2-t)}{(2-t)^2} = \frac{t^2}{(2-t)^2} && (4)
\end{aligned}$$

3. La fonction G est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-2, 2[$ (somme d'une série entière de rayon 2) et donc est dérivable en 1, et donc X admet une espérance avec

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1) \left(\frac{t}{2}\right)^k$$

Or on a

$$G'_X(t) = \frac{2t(2-t)^2 - t^2(-2)(2-t)}{(2-t)^4} = \frac{2t(2-t) + 2t^2}{(2-t)^3} = \frac{4t}{(2-t)^3}$$

et ainsi $\mathbb{E}(X) = 4$.

4. Comme G_X est 2 sois dérivable en 1, X admet une variance et on a

$$\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$$

que l'on peut calculer en dérivant une seconde fois G_X.

Exercice 3

1. Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, X admet une espérance et une variance avec $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$.
2. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P(|X - E(X)| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{V(X)}{\lambda^2}$$

soit ici

$$P(|X - \lambda)| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

3. Si $X \geqslant 2\lambda$, alors $X - \lambda \geqslant \lambda$ et ainsi $|X - \lambda| \geqslant \lambda$. On a donc l'inclusion $(X \geqslant 2\lambda) \subset (|X - \lambda| \geqslant \lambda)$.
4. Ainsi, on obtient

$$P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant P(|X - \lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

5. On considère la série entière $\sum_{n \geqslant 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} t^n$, on reconnaît une série exponentielle, de rayon $+\infty$, avec

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ G_X(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}.$$

6. Soit $t \geqslant 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\ln(t) \geqslant 0$ et ainsi

$$X \geqslant \alpha \iff X\ln(t) \geqslant \alpha \ln(t) \iff \mathrm{e}^{X\ln(t)} \geqslant \mathrm{e}^{\alpha\ln(t)} \iff t^X \geqslant t^\alpha$$

et ainsi $(X \geqslant \alpha) = (t^X \geqslant t^\alpha)$. Alors en apliquant Markov à la variable aléatoire t^X et t^α, sachant que t^X est d'espérance finie égale à $G_X(t)$,

$$P(X \geqslant \alpha) = P(t^X \geqslant t^\alpha) \leqslant \frac{E(t^X)}{t^\alpha} = \frac{G_X(t)}{t^\alpha}.$$

7. Nous avons donc avec $\alpha = 2\lambda$,

$$P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}} = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)-2\lambda\ln(t)}$$

et cela pour tout $t \geqslant 1$. On pose

$$\theta(t) = \lambda(t-1) - 2\lambda\ln(t)$$

dérivable, avec

$$\theta'(t) = \lambda - \frac{2\lambda}{t} = \lambda\frac{t-2}{t}$$

et ainsi la fonction θ admet un minimum en $t = 2$, ce minimum étant

$$\theta(2) = \lambda - 2\lambda\ln(2) = \lambda(1 - 2\ln(2)) = \lambda(1-\ln(4))$$

en en appliquant la majoration pour cette valeur de $t = 2$, nous obtenons donc

$$P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^\lambda.$$

8. On cherche à comparer donc $\dfrac{1}{\lambda} = \mathrm{e}^{-\ln(\lambda)}$ et $\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)^\lambda = \mathrm{e}^{\lambda(1-\ln(4))}$. On a

$$\mathrm{e}^{\lambda(1-\ln(4))} \leqslant \mathrm{e}^{-\ln(\lambda)} \iff \lambda(1-\ln(4)) \leqslant -\ln(\lambda) \iff \frac{\ln(\lambda)}{\lambda} \geqslant \ln(4) - 1$$

On pose $\varphi(\lambda) = \dfrac{\ln(\lambda)}{\lambda}$, de dérivée

$$\varphi'(\lambda) = \frac{1-\ln(\lambda)}{\lambda^2}$$

et ainsi φ admet un maximum en e valant $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. Alors

$$\frac{\ln(\lambda)}{\lambda} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant \frac{\ln(4)-1}{1,05} \leqslant \ln(4) - 1$$

et donc si $\lambda > 0$, $\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)^\lambda \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$. La seconde majoration de $P(X \geqslant 2\lambda)$ est la plus précise.

Problème

1. Soit $t \in \mathbb{R}$, e^{itX} est une variable aléatoire bornée, elle admet donc une espérance finie, et donc on peut définir $\varphi_X(t)$ et par la formule de transfert, on a $\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} P(X = k)$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi_X(t+2\pi) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{i(t+2\pi)k} P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} e^{2ik\pi} P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} P(X = k) = \varphi_X(t)$$

et ainsi φ_X est 2π-périodique.
Posons $f_k(t) = e^{itk} P(X = k)$, nous avons une série de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ $\sum f_k$ avec si $t \in \mathbb{R}$,

$$|f_k(t)| = P(X = k) = a_k$$

et ainsi $\| f_k \|_\infty = P(X = k) = a_k$, et $\sum a_k$ convergente (de somme 1). Nous avons donc la convergence normale donc uniforme de la série $\sum f_k$, et ainsi la somme φ_X est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

3. On a $\varphi_X(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$.

4. On suppose que X admet une espérance. On applique le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ pour la somme d'une série de fonctions. Les fonctions f_k sont de classe $\mathcal{C}^1$, la série $\sum f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, avec

$$f_k'(t) = ike^{itk} P(X = k)$$

avec donc

$$|f_k'(t)| = kP(X = k)$$

et ainsi $\| f_k' \| = kP(X = k)$, et comme X admet une espérance finie, nous avons la convergence de $\sum kP(X = k)$, ce qui assure la convergence normale et donc uniforme de la série des dérivées $\sum f_k'$.
Ainsi φ_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a par dérivation terme à terme

$$\varphi_X'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} ike^{itk} P(X = k).$$

On a $\varphi_X'(0) = i \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k) = iE(X)$.

5. On suppose que X admet une variance. On applique le théorème de classe $\mathcal{C}^2$ pour la somme d'une série de fonctions. Les fonctions f_k sont de classe $\mathcal{C}^2$, la série $\sum f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, $\sum f_k'$ aussi avec

$$f_k''(t) = -k^2 e^{itk} P(X = k)$$

avec donc

$$|f_k''(t)| = k^2 P(X = k)$$

et ainsi $\| f_k''' \| = k^2 P(X = k)$, et comme X^2 admet une espérance finie, nous avons la convergence de $\sum k^2 P(X = k)$, ce qui assure la convergence normale et donc uniforme de la série des dérivées $\sum f_k''$.
Ainsi φ_X est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a par dérivation terme à terme

$$\varphi_X''(t) = -\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \mathrm{e}^{itk} P(X = k).$$

On a $\varphi_X''(0) = -\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(X = k) = -E(X^2)$.

6. On suppose dans cette question que X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Alors

$$\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{it0} P(X = 0) + \mathrm{e}^{it1} P(X = 1) = (1 - p) + \mathrm{e}^{it} p$$

7. On suppose dans cette question que X suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{itk} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{e}^{it} p)^k (1 - p)^{n-k} \\ &= \left[(1 - p) + \mathrm{e}^{it} p\right]^n\end{aligned}$$

On remarque que l'on obtient la fonction caractéristique précédente à la puissance n.

8. Si X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, alors

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{itk} p (1 - p)^{k-1} = p\mathrm{e}^{it} \sum_{k=1}^{+\infty} [\mathrm{e}^{it}(1 - p)]^{k-1} \\ &= \frac{p\mathrm{e}^{it}}{1 - \mathrm{e}^{it}(1 - p)} = \frac{p}{\mathrm{e}^{-it} - (1 - p)}\end{aligned}$$

Si X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, alors

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{itk} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[\mathrm{e}^{it}\lambda]^k}{k!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{it}\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{it} - 1)}\end{aligned}$$

9. Soit X une variable aléatoire quelconque et k un entier. On a si p et q entiers,

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{iu(p-q)} \mathrm{d}u = \begin{cases} 2\pi & \text{si } p = q \\ \left[\dfrac{1}{i(p - q)} \mathrm{e}^{iu(p-q)}\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors en prouvant comme à la question 1 la convergence normale de la série de fonctions $\sum_n \mathrm{e}^{int} P(X = n)\mathrm{e}^{-itk}$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \varphi_X(t)\mathrm{e}^{-itk}\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{int}\mathrm{e}^{-itk} P(X = n)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{int}\mathrm{e}^{-itk}\mathrm{d}t \\ &= 2\pi P(X = k)\end{aligned}$$

et ainsi

$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_X(t)\mathrm{e}^{-itk}\mathrm{d}t$$

Alors si $\varphi_X = \varphi_Y$, pour tout k, nous obtenons

$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_X(t)\mathrm{e}^{-itk}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_Y(t)\mathrm{e}^{-itk}\mathrm{d}t = P(Y = k)$$

et ainsi X et Y ont bien la même loi. La réciproque est évidente.

10. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Nous avons

$$\begin{aligned}\varphi_{X+Y}(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{ikt} P(X + Y = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{ikt} \sum_{p=0}^{k} P(X = p, Y = k - p) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{k} P(X = p)\mathrm{e}^{ipt} P(Y = k - p)\mathrm{e}^{i(k-p)t}\end{aligned}$$

et on reconnaît un produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes,

$$\begin{aligned}\varphi_{X+Y}(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{k} P(X = p)\mathrm{e}^{ipt} P(Y = k - p)\mathrm{e}^{i(k-p)t} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)\mathrm{e}^{ikt} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{ikt} P(Y = k) \\ &= \varphi_X(t)\varphi_Y(t)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\varphi_{X+Y} = \varphi_X . \varphi_Y$$

et en généralisant à une somme de n variables aléatoires indépendantes par récurrence par le biais du lemme des coalitions, on retrouve la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale.