

Quinzaine 9 du 02/02 au 30/02

Chapitre 8 : Intégration sur un intervalle quelconque

Suites et séries de fonctions intégrables.

Théorème de convergence dominée :

Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leq \varphi$ pour tout n , alors les fonctions (f_n) et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt$$

Démonstration hors programme.

L'hypothèse de continuité par morceaux de f , imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

Théorème d'intégration terme à terme :

Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrales sur I , telle que que la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ converge, alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$$

Démonstration hors programme.

L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I |f_n|$.

Cas où le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas, mais où l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles.

Intégrales à paramètre. Théorème de continuité :

Si A et I sont deux intervalles de \mathbb{R} et f une fonction définie sur $A \times I$ telle que : – pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A ;

– pour tout x de A , $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;

– il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur I , telle que pour tout $(x, t) \in A \times I$, on ait

$$|f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

alors la fonction $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est définie et continue sur A .

Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de A ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Théorème de convergence dominée à paramètre continu :

Si A et I sont deux intervalles de \mathbb{R} , a une borne de A et f une fonction définie sur $A \times I$ telle que :

– pour tout $t \in I$, $f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell(t)$

- pour tout x de A , $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur I , telle que pour tout $(x, t) \in A \times I$, on ait

$$|f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

alors la fonction $t \mapsto \ell(t)$ est intégrable sur I et

$$\int_I f(x, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_I \ell(t) dt$$

Théorème de dérivation : Si A et I deux intervalles de \mathbb{R} et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A ;
- pour tout x de A , $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I et intégrable sur I ;
- pour tout x de A , $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur I , telle que pour tout $(x, t) \in A \times I$, on ait

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

alors la fonction g définie par $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A et on a sur A

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Extension aux fonctions de classe \mathcal{C}^k , sous hypothèse de domination de $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$ et d'intégrabilité des $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt$ pour $0 \leq j < k$.

Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de A ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Chapitre 9 : Réduction

Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Exemples raisonnables de recherches de valeurs propres et de vecteurs propres à partir de la définition : équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$; équation aux éléments propres $AX = \lambda X$.

Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v .

Spectre d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice carrée.

La notion de valeur spectrale est hors programme.

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe (*).

Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Si $u(x) = \lambda x$, alors $(u^k)(x) = \lambda^k x$ et pour tout polynôme P , $P(u)(x) = P(\lambda)x$ (*).

Soit P un polynôme annulateur de u ; si λ est valeur propre de u , alors λ est racine de P (réciproque fausse).

Questions de cours :

- Les énoncés des définitions, des théorèmes.
- Les démonstrations marquées par (*).
- Les méthodes usuelles sur des exemples.

