

Devoir n°7

Polynômes de Laguerre¹

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On pose $a_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.
Que vaut a_0 ?
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = (n+1)a_n$$

et en déduire que pour tout entier n ,

$$a_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

On pose si P et Q sont des polynômes de $\mathbb{R}[X]$,

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$$

3. Montrer que $(P|Q)$ est bien définie.
4. Montrer que $(|)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
5. Déterminer pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}$, $(X^n | X^m)$.
6. Vérifier que pour tout polynômes P, Q, R on a $(PQ|R) = (P|QR)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$, et on considère la famille $(P_0, \dots, P_n)$ des polynômes obtenus par orthonormalisation de Schmidt de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ (on remarquera que le changement de dimension n ne change les polynômes P déjà déterminés). On rappelle que le procédé de Schmidt, partant de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$, consiste à poser

$$Q_0 = 1 \quad P_0 = \frac{Q_0}{\|Q_0\|}$$

et si $(P_0, \dots, P_{m-1})$ sont déjà déterminés, formant une base orthonormée de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$, on pose (la somme ci-dessous est la projection vectorielle de X^m sur $\text{Vect}(P_0, \dots, P_{m-1}) = \mathbb{R}_{m-1}[X]$)

$$Q_m = X^m - \sum_{k=0}^{m-1} (X^m | P_k) P_k \quad P_m = \frac{Q_m}{\|Q_m\|}$$

et $(P_0, \dots, P_m)$ est alors une base orthonormée de $\mathbb{R}_m[X]$, avec des degrés échelonnés.

8. Montrer que $P_0 = Q_0 = 1$ et déterminer Q_1 et P_1 .
9. Déterminer Q_2 . On trouvera $Q_2 = X^2 - 4X + 2$. Quelles sont les racines de P_2 ?

1. les polynômes de Laguerre apparaissent en mécanique quantique dans la partie radiale de la solution de l'équation de Schrödinger pour un atome à un électron

10. Soit $n \geq 3$. On souhaite montrer que P_n est scindé à racines simples et que ses racines sont positives. Pour cela on note $r_1, \dots, r_p$ les racines de P_n qui sont à la fois positives et d'ordre impair avec donc $p \leq n$. On pose alors

$$R = (X - r_1) \cdots (X - r_p)$$

si $R = 1$ par convention (produit vide) si p est nul.

- (a) On suppose par l'absurde que $p < n$. Montrer que $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
En déduire que $(R|P_n) = 0$.
- (b) Montrer en étudiant les racines de RP et leur multiplicité que

$$\forall t \geq 0, R(t)P_n(t)$$

est de signe constant.

En déduire que $t \mapsto R(t)P_n(t)e^{-t}$ serait nulle sur $[0, +\infty[$.

- (c) Montrer alors que $p = n$ et conclure.

11. Une autre façon d'aborder les polynômes de Laguerre (introduction). On pose si $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$L_n(x) = e^x [e^{-x}x^n]^{(n)}$$

- (a) Déterminer L_0 , L_1 et L_2 . Comparer à Q_0 , Q_1 et Q_2 .
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est un polynôme de degré n (utiliser la formule de Leibniz par exemple).
- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p entier avec $0 \leq p \leq n$. Montrer que

$$(X^p|L_n) = (-1)^p p! \int_0^{+\infty} [e^{-x}x^n]^{(n-p)} dx$$

On effectuera des intégrations par parties généralisées.

En déduire que si $p < n$, $(X^p|L_n) = 0$ et déterminer aussi $(X^n|L_n)$.

- (d) En déduire que si n et m sont deux entiers distincts, $(L_n|L_m) = 0$ et déterminer $(L_n|L_n)$.