

Quinzaine 11 du 16/03 au 27/03

Chapitre 10 : *Espaces euclidiens*

Isométries vectorielles : un endomorphisme d'un espace euclidien E est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.

Une application linéaire qui conserve la norme est injective.

En dimension finie, une application linéaire qui conserve la norme est un automorphisme.

Caractérisations par la conservation du produit scalaire (*), par l'image d'une (de toute) base orthonormale (*).

En remarque : une application de E dans E (E de dimension quelconque) qui conserve le produit scalaire est forcément linéaire.

Exemple des symétries orthogonales et réflexions orthogonales.

Autre dénomination des isométries vectorielles d'un espace euclidien : automorphismes orthogonaux. Groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$.

Stabilité par produit, par réciproque (*).

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable d'une isométrie vectorielle.

Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.

Matrices orthogonales. Interprétation en termes de colonnes et de lignes, d'inverse.

Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.

Groupe orthogonal $\mathcal{O}(n)$ ou $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Stabilité par produit, inverse.

Description des matrices de $\mathcal{O}(2)$ (*).

Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal. Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.

Orientation d'un espace euclidien. Bases orthonormées directes.

Isométries vectorielles d'un plan euclidien. Détermination des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Commutativité dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Mesure de l'angle d'une rotation d'un plan euclidien orienté. Mesure de l'angle orienté entre deux vecteurs non nuls.

Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.

Composée de deux réflexions du plan euclidien.

Endomorphisme autoadjoint ou symétrique d'un espace euclidien. Notation $\mathcal{S}(E)$.

Caractérisation des projecteurs orthogonaux.

Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint par sa matrice dans une base orthonormée (*).

Réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles : théorème spectral : tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée des vecteurs propres ; toute matrice symétrique réelle est diagonalisable à l'aide d'une base orthonormée.

Preuve du fait que les valeurs propres complexes d'une matrice symétrique réelle sont réelles (*).

Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Matrice symétrique positive, définie positive.

Caractérisation par le spectre.

Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$, $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Écriture de $(u(x)|y)$ ou $(AX|Y)$ à l'aide des coordonnées dans une base orthonormée et des coefficients de A et de $(u(x)|x)$ et $(AX|X)$ (*). Cas A diagonale (ou base de vecteurs propres).

Chapitre 11 : *Espaces vectoriels normés*

Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe ; espace vectoriel normé. Normes usuelles $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Exemple de la norme infinie sur l'espace des fonctions bornées.

Norme associée à un produit scalaire. Exemples usuels.

Distance associée à une norme. Boules ouvertes, boules fermées, sphères.

Parties convexes. Exemples. Convexité des boules (*).

Parties bornées, suites bornées, fonctions bornées.

Convergence et divergence d'une suite. Exemples divers. Unicité de la limite. Opérations. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente vers la même limite.

Questions de cours :

- Les énoncés des définitions, des théorèmes.
- Les démonstrations marquées par (*).
- Les méthodes usuelles sur des exemples.

