

Devoir surveillé n°7

3 heures

CCP : produit tensoriel et diagonalisation (1h30)

1. On considère la matrice

$$V = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que V est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner une matrice inversible que l'on notera

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

vérifiant $V = PDP^{-1}$ avec D la matrice diagonale $D = \text{diag}(1, 2)$ (on précisera P^{-1}).

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose alors la matrice par blocs $Q = \begin{pmatrix} \alpha I_n & \beta I_n \\ \gamma I_n & \delta I_n \end{pmatrix}$.

Montrer que Q est inversible et préciser Q^{-1} (on réfléchira en blocs pour imaginer ce que peut-être Q^{-1}).

Montrer que la matrice en blocs $V \otimes A = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est semblable à la matrice $D \otimes A = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$.

3. On suppose que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et on note R une matrice inversible, Δ une matrice diagonale telles que $A = R\Delta R^{-1}$. Calculer le produit matriciel par blocs

$$\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} (D \otimes A) \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

Que peut-on en déduire pour la matrice $V \otimes A = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$

4. Démontrer que la matrice $E = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner une matrice inversible P telle que $E = P \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $E \otimes A = \begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice

$$T \otimes A = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

avec $T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

CCP : Valeurs propres des matrices stochastiques (1h)

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique (respectivement strictement stochastique) si elle est à coefficients positifs (respectivement strictement positifs) et si

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$$

1. Montrer qu'une matrice A est stochastique si et seulement si 1 est valeur propre de A et la matrice colonne U avec $U^T = (1 \cdots 1)$ est un vecteur propre associé.
2. En déduire que le produit de deux matrices stochastiques (respectivement strictement stochastiques) est une matrice stochastique (respectivement strictement stochastique).
3. Soit A une matrice stochastique.
 - (a) Soit X une matrice colonne, et $Y = AX$. Pour tout i entre 1 et n , exprimer y_i en fonction de $x_1, \dots, x_n$ et en déduire que $\|Y\|_\infty \leq \|X\|_\infty$, c'est à dire que

$$\max_{1 \leq i \leq n} (|y_i|) \leq \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$$

- (b) Soit λ une valeur propre (réelle ou complexe) de A , X une colonne propre associée et $Y = AX = \lambda X$. Déduire de la question précédente que $|\lambda| \leq 1$.
4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, que l'on suppose à diagonale dominante, c'est à dire que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$$

Par exemple la matrice

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

est à diagonale strictement dominante.

- (a) On suppose que λ est valeur propre de A et on note X une colonne (non nulle) propre associée de sorte que $AX = \lambda X$. Montrer que pour tout i entre 1 et n , on a

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \lambda x_i$$

On note i_0 un indice entre 1 et n de sorte $|x_{i_0}|$ soit la coordonnée de X maximale en module. Justifier que $x_{i_0} \neq 0$. En déduire que

$$|\lambda - a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0,j}|$$

- (b) En déduire que 0 ne peut être valeur propre de A et que la matrice A est inversible.
5. Soit A une matrice strictement stochastique.
 - (a) On note A_1 la matrice extraite de A en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne. Montrer que $A_1 - I_{n-1}$ est à diagonale strictement dominante.
 - (b) Que peut-on en déduire pour le rang de $A - I$?
 - (c) Montrer que $\text{Ker}(A - I_n)$ est de dimension 1.
 - (d) Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \setminus \{1\}$. Montrer que $|\lambda| < 1$.

Centrale : Diagonalisation des matrices tridiagonales (1h30)

Une matrice tridiagonale est une matrice de la forme

$$A_n(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{pmatrix}$$

où a, b et c sont des complexes.

On fixe (a, b, c) trois nombres complexes tels que $bc \neq 0$. On se propose de chercher les éléments propres de $A_n(a, b, c)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A_n(a, b, c)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.

1. Montrer que si l'on pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, alors $(x_1, \dots, x_n)$ sont les termes de rang variant de 1 à n d'une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 0$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, bx_{k+2} + (a - \lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$$

2. Rappeler l'expression du terme général de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en fonction des solutions de l'équation

$$bx^2 + (a - \lambda)x + c = 0 \quad (1)$$

3. À l'aide des conditions imposées à x_0 et x_{n+1} , montrer que (1) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 .
4. Montrer que r_1 et r_2 sont non nuls et que $\frac{r_1}{r_2}$ appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$.
5. En utilisant l'équation (1) satisfaite par r_1 et r_2 , déterminer $r_1 r_2$ et $r_1 + r_2$. En déduire qu'il existe un entier $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et un nombre complexe ρ vérifiant $\rho^2 = bc$ tels que

$$\lambda = a + 2\rho \cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$$

6. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout k dans $\llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $x_k = 2i\alpha \frac{\rho^k}{b^k} \sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$.
7. Conclure que $A_n(a, b, c)$ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Fin

CCP : produit tensoriel et diagonalisation (1h30)

1. On considère la matrice

$$V = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de V est

$$\chi_V(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda + 1) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Ainsi la matrice V admet deux valeurs propres distinctes. Ainsi V est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. On détermine alors les espaces propres qui sont des droites vectorielles. On a

$$VX = 1.X \iff \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ -3x - 2y = 0 \end{cases} \iff 3x + 2y = 0$$

Ainsi $E_1(V) = \text{Vect}((2, -3))$. On a aussi

$$VX = 2.X \iff \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -3x - 3y = 0 \end{cases} \iff x + y = 0$$

Ainsi $E_2(V) = \text{Vect}((1, -1))$. On pose alors

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

vérifiant $V = PDP^{-1}$ avec D la matrice diagonale $D = \text{diag}(1, 2)$. On a

$$P^{-1} = \frac{1}{P} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose alors la matrice par blocs $Q = \begin{pmatrix} \alpha I_n & \beta I_n \\ \gamma I_n & \delta I_n \end{pmatrix}$. On remarque que

$$\begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

et ainsi la matrice $Q = P \otimes I_n$ est inversible (à droite et donc tout court) et son inverse est

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix} = P^{-1} \otimes I_n$$

On a alors $Q^{-1}(V \otimes A)Q$ qui vaut

$$\begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & -A \\ 6A & 4A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$$

et ainsi la matrice en blocs $V \otimes A = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est semblable à la matrice

$$D \otimes A = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}.$$

3. On suppose que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et on note R une matrice inversible, Δ une matrice diagonale telles que $A = R\Delta R^{-1}$. On a

$$\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{-1}AR & 0 \\ 0 & 2R^{-1}AR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 2\Delta \end{pmatrix} = D \otimes \Delta$$

Ainsi la matrice $V \otimes A = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ est semblable à $D \times A$ semblable à $D \times \Delta$ qui est diagonale et ainsi $V \times A$ est diagonalisable.

4. On considère la matrice $E = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_E(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1) + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Ainsi E admet une unique valeur propre 1 et comme E n'est la matrice I_2 , E ne peut être diagonalisable. Par contre, comme le polynôme caractéristique de E est scindé, E est trigonalisable. On a

$$EX = 1.X \iff 2x - 2y = 0 \iff x = y$$

Ainsi $E_1(E) = \text{Vect}((1, 1))$. On pose $e_1 = (1, 1)$ de matrice colonne Y . On cherche e_2 de matrice colonne X de sorte que $EX = -2Y + X$. On a

$$EX = -2Y + X \iff \begin{cases} 3x - 2y = -2 + x \\ 2x - y = -2 + y \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2y = -2 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases} \iff x - y + 1 = 0$$

On choisit $e_2(0, 1)$ et on pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que $P^{-1}EP = T$ soit encore $E = PTP^{-1}$. On a aussi

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme ci-dessus, on a

$$Q' = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$$

inversible d'inverse

$$Q'^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$$

et $Q'^{-1}E \otimes AQ'$ vaut

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3A & -2A \\ -A & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Ainsi la matrice $E \otimes A = \begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $T \otimes A = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

CCP : Valeurs propres des matrices stochastiques(1h)

1. La matrice A est stochastique si et seulement si $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ soit encore si et seulement si $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{i,j} \times 1 = 1$ ce qui s'écrit aussi $AU = U$, c'est à dire si et seulement si U vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
2. Soit A et B deux matrices stochastiques, $C = AB$, on a avec les notations usuelles

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

et ainsi si A et B sont à coefficients positifs (respectivement à coefficients strictement positifs), C aussi. De plus on a

$$CU = (AB)U = A(BU) = AU = U$$

et ainsi U est vecteur propre de C associé à la valeur propre 1 et donc la matrice AB est stochastique (respectivement strictement stochastique).

3. Soit A une matrice stochastique.
 - (a) Soit X une matrice colonne, et $Y = AX$. Pour tout i entre 1 et n , on exprime y_i en fonction de $x_1, \dots, x_n$: on a

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$$

Ainsi

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |y_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \right) \|X\|_{\infty} = \|X\|_{\infty}$$

d'où $\max_{1 \leq i \leq n} (|y_i|) \leq \|X\|_{\infty}$ soit encore $\|Y\|_{\infty} \leq \|X\|_{\infty}$.

- (b) Soit λ une valeur propre (réelle ou complexe) de A , X une colonne propre associée et $Y = AX = \lambda X$. On a $\|Y\|_{\infty} \leq \|X\|_{\infty}$ et comme $Y = \lambda X$, $\|Y\|_{\infty} = |\lambda| \|X\|_{\infty}$ et ainsi $|\lambda| \|X\|_{\infty} \leq \|X\|_{\infty}$. Comme X est non nul, sa norme n'est pas nulle, et ainsi $|\lambda| \leq 1$.
4. (a) On suppose que λ est valeur propre de A et on note X une colonne (non nulle) propre associée de sorte que $Y = AX = \lambda X$. Soit i entre 1 et n , on a par le produit matriciel

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \lambda x_i$$

On note i_0 un indice entre 1 et n de sorte $|x_{i_0}|$ soit la coordonnée de X maximale en module. Si on avait $x_{i_0} = 0$, alors $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 0$ et ainsi $X = 0$ ce qui est exclu. Ainsi en appliquant l'égalité ci-dessus pour i_0

$$\sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j = \lambda x_{i_0} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n a_{i_0,j} x_j + a_{i_0,i_0} x_{i_0}$$

et ainsi $(\lambda - a_{i_0, i_0})x_{i_0} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}} a_{i_0, j}x_j$ d'où

$$|\lambda - a_{i_0, i_0}| \cdot |x_{i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}} |a_{i_0, j}| |x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}} |a_{i_0, j}| |x_{i_0}|$$

et ainsi en simplifiant par $|x_{i_0}|$ non nul, on obtient $|\lambda - a_{i_0, i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}} |a_{i_0, j}|$.

- (b) Si 0 était valeur propre de A , on choisit $\lambda = 0$ et on applique le calcul précédent qui donne

$$|a_{i_0, i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}} |a_{i_0, j}| < |a_{i_0, i_0}|$$

ce qui est contradictoire. Ainsi 0 n'est pas valeur propre de A et on en déduit que la matrice A est inversible.

5. Soit A une matrice strictement stochastique.

- (a) On note A_1 la matrice extraite de A en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne. On a ainsi

$$A_1 = (a_{i, j} - \delta_{i, j})_{1 \leq i, j \leq n-1} = (b_{i, j})$$

avec $\delta_{i, j}$ le symbole de Kronecker. Soit i entre 1 et $n-1$, on a (puisque A strictement stochastique)

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} |b_{i, j}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} |a_{i, j}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{i, j} = 1 - a_{i, i} - a_{i, n} < 1 - a_{i, i} = |a_{i, i} - 1|$$

et ainsi la matrice A_1 est bien à diagonale strictement dominante.

- (b) Ainsi la matrice $A_1 - I_{n-1}$ est inversible. Elle est donc de rang $n-1$. On peut alors en déduire que les $n-1$ premières colonnes de $A - I_n$ sont de rang $n-1$, donc indépendantes ce qui implique que $A - I_n$ est de rang au moins $n-1$. Comme 1 est valeur propre de A stochastique, $A - I_n$ n'est pas de rang n et ainsi elle est donc de rang exactement $n-1$.
- (c) En appliquant le théorème du rang, on a $n = \text{rg}(A - I_n) + \dim \text{Ker}(A - I_n)$ et ainsi $\text{Ker}(A - I_n)$ est de dimension 1.
- (d) Soit $\lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{1\}$. On sait déjà que $|\lambda| \leq 1$ et $\lambda \neq 1$. Si on avait $|\lambda| = 1$, on sait qu'il existe un indice i_0 de sorte que

$$|\lambda - a_{i_0, i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}} |a_{i_0, j}|$$

Ainsi

$$|\lambda| - a_{i_0, i_0} \leq |\lambda - a_{i_0, i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}} a_{i_0, j} = 1 - a_{i_0, i_0}$$

soit encore

$$1 - a_{i_0, i_0} \leq |\lambda - a_{i_0, i_0}| \leq 1 - a_{i_0, i_0}$$

et donc $1 - a_{i_0, i_0} = |\lambda - a_{i_0, i_0}|$, soit

$$1 = |\lambda| = |\lambda - a_{i_0, i_0} + a_{i_0, i_0}| \leq |\lambda - a_{i_0, i_0}| + a_{i_0, i_0}$$

Or il y a égalité dans une inégalité triangulaire complexe si et seulement si les deux complexes sont de même argument, soit ici $\lambda - a_{i_0, i_0}$ réel positif et ainsi λ réel positif soit forcément ici $\lambda = 1$, ce qui est exclu. Donc $|\lambda| < 1$.

Centrale : Diagonalisation des matrices tridiagonales

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A_n(a, b, c)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.

1. On a $A_n(a, b, c)X = \lambda X$, que l'on transcrit en termes de coefficients, soit

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \lambda x_i$$

soit encore

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 & = \lambda x_1 \\ cx_1 + ax_2 + bx_3 & = \lambda x_2 \\ & \vdots \\ cx_{n-2} + ax_{n-1} + bx_n & = \lambda x_{n-1} \\ cx_{n-1} + ax_n & = \lambda x_n \end{cases}$$

c'est à dire en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$,

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, cx_k + ax_{k+1} + bx_{k+2} = \lambda x_{k+1}$$

soit encore

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, cx_k + (a - \lambda)x_{k+1} + bx_{k+2} = 0$$

et ainsi $(x_1, \dots, x_n)$ sont les termes de rang variant de 1 à n d'une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 0, x_{n+1} = 0$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, bx_{k+2} + (a - \lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$$

2. La suite (x_k) est alors solution d'une relation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, d'équation caractéristique $bx^2 + (a - \lambda)x + c = 0$, avec on le rappelle $bc \neq 0$. Lorsque le discriminant est non nul, si r et s sont les racines distinctes du polynôme caractéristique, alors l'espace des solutions est $\text{Vect}((r^n), (s^n))$. Lorsque le discriminant est nul, r la racine double, l'espace des solutions est $\text{Vect}((r^n), (nr^n))$.
3. Si nous étions dans le cas d'un discriminant nul, notons r la racine double, on aurait l'existence de α et β des complexes de sorte que

$$\forall k \in \mathbb{N}, x_k = \alpha r^k + \beta k r^k$$

Les conditions $x_0 = x_{n+1} = 0$ impliqueraient alors que

$$x_0 = 0 = \alpha \quad x_{n+1} = 0 = \alpha r^{n+1} + \beta(n+1)r^{n+1}$$

soit encore $\alpha = 0$ et $(n+1)\beta r^{n+1} = 0$, et comme $r \neq 0$ (sinon on aurait $c = 0$), $\beta = 0$. Alors la suite (x_k) serait la suite nulle, ce qui est exclu car sinon on aurait le vecteur propre X nul. Ainsi le discriminant est non nul, et nous avons deux racines distinctes r_1 et r_2 .

4. Les racines r_1 et r_2 sont non nulles puisque $c \neq 0$. Il existe α et β des complexes de sorte que

$$\forall k \in \mathbb{N}, x_k = \alpha r_1^k + \beta r_2^k$$

Les conditions $x_0 = x_{n+1} = 0$ impliquent alors que

$$x_0 = 0 = \alpha + \beta \quad x_{n+1} = 0 = \alpha r_1^{n+1} + \beta r_2^{n+1}$$

soit encore $\beta = -\alpha$ et $\alpha(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) = 0$. On a $\alpha \neq 0$ puisque $X \neq 0$ et ainsi $r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$ soit $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} = 1$ ce qui signifie que $\frac{r_1}{r_2}$ appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$.

5. On a $r_1 r_2 = \frac{c}{b}$ et $r_1 + r_2 = \frac{\lambda - a}{b}$ (somme et produit des racines d'une équation de degré 2). On écrit $\frac{r_1}{r_2} = e^{\frac{2i\ell\pi}{n+1}}$ avec $\ell \in \{0, \dots, n\}$; $\ell = 0$ imposerait $r_1 = r_2$, ce qui est exclu et ainsi $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a

$$\lambda = a + b(r_1 + r_2) = a + br_2 \left(1 + e^{\frac{2i\ell\pi}{n+1}}\right) = a + 2 \underbrace{br_2 e^{\frac{i\ell\pi}{n+1}}}_{=\rho} \cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$$

avec

$$\rho^2 = b^2 r_2^2 e^{\frac{2i\ell\pi}{n+1}} = b^2 r_2^2 \frac{r_1}{r_2} = b^2 r_1 r_2 = bc$$

et donc

$$\lambda = a + 2\rho \cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$$

avec $\rho^2 = bc$, $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

6. Alors avec la constante α de la questio 4.,

$$x_k = \alpha (r_1^k - r_2^k) = \alpha r_2^k \left(e^{\frac{2ik\ell\pi}{n+1}} - 1\right) = 2i\alpha r_2^k e^{\frac{ik\ell\pi}{n+1}} \sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right) = 2i\alpha \frac{\rho^k}{b^k} \sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$$

7. L'étude faite dans les questions ci-dessus est essentiellement de type analyse. On obtient que si λ est une valeur propre, alors il existe $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et ρ un complexe non nul, $\rho^2 = bc$, tels que

$$\lambda = a + 2\rho \cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) = \lambda_\ell$$

et X colinéaire à

$$X_\ell = \left(2i \frac{\rho^k}{b^k} \sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)\right)_{1 \leq k \leq n} \neq 0$$

Réciproquement, les calculs se remontent sans difficultés, et nous obtenons que les valeurs λ_ℓ , $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont des valeurs propres, et comme $\frac{\ell\pi}{n+1} \in [0, \pi]$, nous obtenons n valeurs propres distinctes. Ainsi $A_n(a, b, c)$ est diagonalisable et son spectre est l'ensemble des n valeurs distinctes

$$a + 2\rho \cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$$

avec $\ell \in \{1, \dots, n\}$, et d'espaces propres associés les droites engendrées par X_ℓ .