

Devoir n°7

Polynômes de Laguerre¹

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On pose $a_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.
Que vaut a_0 ?
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = (n+1)a_n$$

et en déduire que pour tout entier n ,

$$a_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

On pose si P et Q sont des polynômes de $\mathbb{R}[X]$,

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$$

3. Montrer que $(P|Q)$ est bien définie.
4. Montrer que $(|)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
5. Déterminer pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}$, $(X^n|X^m)$.
6. Vérifier que pour tout polynômes P, Q, R on a $(PQ|R) = (P|QR)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$, et on considère la famille $(P_0, \dots, P_n)$ des polynômes obtenus par orthonormalisation de Schmidt de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ (on remarquera que le changement de dimension n ne change les polynômes P déjà déterminés). On rappelle que le procédé de Schmidt, partant de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$, consiste à poser

$$Q_0 = 1 \quad P_0 = \frac{Q_0}{\|Q_0\|}$$

et si $(P_0, \dots, P_{m-1})$ sont déjà déterminés, formant une base orthonormée de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$, on pose (la somme ci-dessous est la projection vectorielle de X^m sur $\text{Vect}(P_0, \dots, P_{m-1}) = \mathbb{R}_{m-1}[X]$)

$$Q_m = X^m - \sum_{k=0}^{m-1} (X^m|P_k)P_k \quad P_m = \frac{Q_m}{\|Q_m\|}$$

et $(P_0, \dots, P_m)$ est alors une base orthonormée de $\mathbb{R}_m[X]$, avec des degrés échelonnés.

8. Montrer que $P_0 = Q_0 = 1$ et déterminer Q_1 et P_1 .
9. Déterminer Q_2 . On trouvera $Q_2 = X^2 - 4X + 2$. Quelles sont les racines de P_2 ?

1. les polynômes de Laguerre apparaissent en mécanique quantique dans la partie radiale de la solution de l'équation de Schrödinger pour un atome à un électron

10. Soit $n \geq 3$. On souhaite montrer que P_n est scindé à racines simples et que ses racines sont positives. Pour cela on note $r_1, \dots, r_p$ les racines de P_n qui sont à la fois positives et d'ordre impair avec donc $p \leq n$. On pose alors

$$R = (X - r_1) \cdots (X - r_p)$$

si $R = 1$ par convention (produit vide) si p est nul.

- (a) On suppose par l'absurde que $p < n$. Montrer que $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
En déduire que $(R|P_n) = 0$.
- (b) Montrer en étudiant les racines de RP et leur multiplicité que

$$\forall t \geq 0, R(t)P_n(t)$$

est de signe constant.

En déduire que $t \mapsto R(t)P_n(t)e^{-t}$ serait nulle sur $[0, +\infty[$.

- (c) Montrer alors que $p = n$ et conclure.

11. Une autre façon d'aborder les polynômes de Laguerre (introduction). On pose si $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$L_n(x) = e^x [e^{-x} x^n]^{(n)}$$

- (a) Déterminer L_0 , L_1 et L_2 . Comparer à Q_0 , Q_1 et Q_2 .
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est un polynôme de degré n (utiliser la formule de Leibniz par exemple).
- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p entier avec $0 \leq p \leq n$. Montrer que

$$(X^p|L_n) = (-1)^p p! \int_0^{+\infty} [e^{-x} x^n]^{(n-p)} dx$$

On effectuera des intégrations par parties généralisées.

En déduire que si $p < n$, $(X^p|L_n) = 0$ et déterminer aussi $(X^n|L_n)$.

- (d) En déduire que si n et m sont deux entiers distincts, $(L_n|L_m) = 0$ et déterminer $(L_n|L_n)$.

1. La fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc continue par morceaux. Elle est continue sur le segment $[0, 1]$ donc intégrable sur $]0, 1]$ et puisque

$$t^2 t^n e^{-t} = t^{n+2} e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

on a

$$t^n e^{-t} = o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$$

et ainsi comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, on en déduit que $t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Finalement, $t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On a $a_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ (intégrale de référence), sachant que

$$\int_0^x e^{-t} dt = [e^{-x}]_0^x = 1 - e^{-x} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 1.$$

2. On a

$$a_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt$$

On pose

$$\begin{cases} u(t) = t^{n+1} \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \quad \begin{cases} u'(t) = (n+1)t^n \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

avec u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et

$$u(t)v(t) = -t^{n+1}e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \quad u(t)v(t) = -t^{n+1}e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

et ainsi par intégration par parties, on a

$$a_{n+1} = 0 - \int_0^{+\infty} -(n+1)t e^{-t} dt = (n+1)a_n$$

On a $a_0 = 1 = 0!$. Si on suppose que $a_n = n!$, alors

$$a_{n+1} = (n+1)a_n = (n+1)n! = (n+1)!$$

et ainsi on a prouvé par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!.$$

3. Soient P et Q deux polynômes, alors PQ est combinaison linéaire de monôme X^n . Comme

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

est convergente, on en déduit par combinaison linéaire, puisque $t \mapsto PQe^{-t}$ est alors combinaison linéaire de termes $t \mapsto t^n e^{-t}$ que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$$

est aussi convergente. Ainsi $(P|Q)$ est bien défini.

4. On remarque déjà que par définition, $(|) : \mathbb{R}[X]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est symétrique. La bilinéarité découle de la linéarité de l'intégrale : si $(P, Q, R) \in \mathbb{R}[X]^3$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}(\lambda P + \mu Q|R) &= \int_0^{+\infty} (\lambda P(t) + \mu Q(t))R(t)e^{-t}dt \\&= \int_0^{+\infty} (\lambda P(t)R(t) + \mu Q(t)R(t))e^{-t}dt \\&= \lambda \int_0^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t}dt + \mu \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t}dt \\&= \lambda(P|R) + \mu(Q|R)\end{aligned}$$

d'où la linéarité selon la première variable et la bilinéarité par symétrie.

Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on a par positivité de l'intégrale

$$(P|P) = \int_0^{+\infty} \underbrace{P^2(t)e^{-t}}_{\geq 0} dt \geq 0$$

et si $(P|P) = 0$, on a avec $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ continue positive,

$$\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt = 0$$

et ainsi par théorème, $t \mapsto P^2(t)e^{-t} = 0$ sur $]0, +\infty[$, et donc $P(t) = 0$ sur $]0, +\infty[$. Le polynôme P admet alors une infinité de racines, et donc il est nul.

Ainsi $(|)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

5. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$(X^n|X^m) = \int_0^{+\infty} t^n t^m e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{n+m} e^{-t} dt = (n+m)!.$$

6. Soient P, Q et R des polynômes, on a

$$\begin{aligned}(PQ|R) &= \int_0^{+\infty} (PQ)(t)R(t)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)R(t)e^{-t}dt \\&= \int_0^{+\infty} P(t)(QR)(t)e^{-t}dt = (P|QR).\end{aligned}$$

7. Ainsi

$$Q_0 = 1$$

et

$$\|Q_0\|^2 = (1|1) = 1$$

d'où $P_0 = 1$. Puis

$$Q_1 = X - (X|1)1 = X - 1$$

et

$$\|Q_1\|^2 = (X-1|X-1) = (X|X) - 2(X|1) + (1|1) = 2 - 2 + 1 = 1$$

d'où $P_1 = X - 1$.

8. Puis

$$Q_2 = X^2 - (X^2|1)1 - (X^2|X-1)(X-1) = X^2 - 2 - 4(X-1) = X^2 - 4X + 2$$

avec $X^2 - 4X + 2 = (X-2)^2 - 2$ et dont les racines sont donc $2 \pm \sqrt{2}$.

9. On a $p \leq n - 1$ et ainsi comme R est de degré p , on a $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comme P_n est orthogonal à $P_0, \dots, P_{n-1}$ par construction, il est orthogonal à tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1})$, donc à R et ainsi $(R|P_n) = 0$.
10. Si on considère le polynôme RP_n , on a alors ses racines positives qui sont toutes d'ordre pair, et ainsi RP_n ne change pas de signe sur $]0, +\infty[$, et pourtant

$$(R|P_n) = 0 = \int_0^{+\infty} R(t)P_n(t)e^{-t}dt$$

Comme $t \mapsto R(t)P_n(t)e^{-t}$ est continue de signe constant sur $]0, +\infty[$ et donc d'intégrale nulle, cela implique que $t \mapsto R(t)P_n(t)e^{-t}$ est nulle sur $]0, +\infty[$.

11. Ainsi RP_n nul aussi sur $]0, +\infty[$, donc admet une infinité de racines, donc est nul, et comme $P_n \neq 0$ (pas de diviseur de zéro dans $\mathbb{R}[X]$), on obtient que $R = 0$, ce qui est absurde. On a en fait $p = n$. Le polynôme P_n admet n racines distinctes (il est scindé à racines simples) qui sont toutes dans $]0, +\infty[$.
12. (a) On a $L_0(x) = e^x e^{-x} x^0 = 1 = Q_0(x)$, et

$$L_1(x) = e^x [e^{-x}x]' = e^x [-e^{-x}x + e^{-x}] = 1 - x = -Q_1(x)$$

puis

$$\begin{aligned} L_2(x) &= e^x [e^{-x}x^2]'' \\ &= e^x [-e^{-x}x^2 + e^{-x}2x]' \\ &= e^x [e^{-x}x^2 - 4xe^{-x} + 2e^{-x}] \\ &= x^2 - 4x + 2 = Q_2(x) \end{aligned}$$

(b) Par la formule de Leibniz, nous avons

$$\begin{aligned} L_n(x) &= e^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{-x} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \end{aligned}$$

et ainsi L_n est un polynôme de degré n , de coefficient dominant $(-1)^n$.

- (c) On effectue des intégrations par parties généralisées successives (p) : les termes entre crochets seront nuls en 0 et en $+\infty$ par le fait que toutes les dérivées qui apparaissent

$$[e^{-x}x^n]^{(k)}$$

sont de la forme $e^{-x}xP(x)$ avec P polynôme. On a

$$\begin{aligned} (X^p|L_n) &= \int_0^{+\infty} x^p [e^{-x}x^n]^{(n)} dx \\ &= \underbrace{\left[x^p [e^{-x}x^n]^{(n-1)} \right]_0^{+\infty}}_{=0} - p \int_0^{+\infty} x^{p-1} [e^{-x}x^n]^{(n-1)} dx \\ &\vdots \\ &= (-1)^p p! \int_0^{+\infty} [e^{-x}x^n]^{(n-p)} dx \end{aligned}$$

Ainsi si $p = n$, on a

$$(X^n|L_n) = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = (-1)^n (n!)^2$$

et si $p < n$, on a

$$\begin{aligned} (X^p|L_n) &= (-1)^p p! \int_0^{+\infty} [e^{-x} x^n]^{(n-p)} dx \\ &= (-1)^p p! \left[[e^{-x} x^n]^{(n-p-1)} \right]_0^{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

car nulle en 0 et $+\infty$ (de la forme $e^{-x} x P(x)$ par la formule de Leibniz)

(d) Si par exemple $n < m$, on écrit

$$L_n = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$$

et ainsi

$$(L_n|L_m) = \sum_{k=0}^n (X^k|L_n) = 0$$

On a aussi $L_n = (-1)^n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$ et donc

$$(L_n|L_n) = (-1)^n (X^n|L_n) + \sum_{k=0}^{n-1} (X^k|L_n) = (n!)^2$$

et donc $\|L_n\| = n!$.

Par exemple, pour vérification, avec $L_2 = X^2 - 4X + 2$,

$$\begin{aligned} \|Q_2\|^2 &= (X^2 - 4X + 2|X^2 - 4X + 2) \\ &= (X^2|X^2) + 16(X|X) + 4(1|1) - 8(X^2|X) + 4(X^2|1) - 16(X|1) \\ &= 24 + 16 \times 2 + 4 - 8 \times 6 + 4 \times 2 - 16 \\ &= 4 = (2!)^2 \end{aligned}$$