

Devoir surveillé n°7

3 heures

EXERCICE 1

1. (a) Soit x un réel strictement positif. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt$ est convergente et qu'elle vérifie les inégalités suivantes :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt \leq \frac{1}{x}$$

- (b) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $t \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$, admet une limite quand $t \rightarrow 0^+$, dont on donnera la valeur.
- (c) Dédire de ce qui précède que, pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$ est absolument convergente.
2. On désigne désormais par F la fonction qui à $x > 0$ associe $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$.
- (a) Soit c un réel strictement positif. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[c, +\infty[$.
- (b) En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Calculer $F'(x)$ puis $F(x)$, pour tout $x \in]0, +\infty[$.

3. Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$.

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ est convergente et calculer sa valeur.

On pourra utiliser la fonction F étudiée précédemment.

EXERCICE 2

Montrer la convergence¹ des intégrales et le fait que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt$$

En déduire que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

1. à faire soigneusement

Transformée de Fourier

Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrable, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $\hat{f}$ dite transformée de Fourier de f par

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi t\nu} f(t) dt$$

La variable t joue le rôle du temps, ν la fréquence.

1. Montrer que la transformée de Fourier $\hat{f}$ d'une fonction f continue par morceaux et intégrable est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer aussi que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose que f admet un moment d'ordre p , c'est à dire que $t \mapsto t^p f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, avec $p \geq 1$.

(a) Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |t^{p-1}| \leq |t|^p + 1$$

(b) En déduire que f admet un moment d'ordre $p-1$ puis que f admet des moments aux ordres $1, 2, \dots, p$.

(c) Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et exprimer $\hat{f}^{(i)}$ pour $0 \leq i \leq p$.

4. On considère la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{2i\pi\nu_0 t} & \text{si } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction complexe f représente un paquet d'onde sinusoïdale (durée finie). L'analyse de Fourier classique des fonctions périodiques ne peut-être utilisée ici. La transformée de Fourier va permettre d'analyser le spectre d'un tel signal. Pour cet exemple, la fréquence qui doit être mise en évidence est ν_0 .

Montrer que

$$\hat{f}(\nu) = \tau \text{sinc}(\pi\tau(\nu - \nu_0))$$

avec la fonction sinus cardinal sinc définie par

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Représenter la fonction $\hat{f}$. Quelle fréquence est mise en évidence ?

5. Étudier de même la transformée de Fourier de la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Représenter la fonction $\hat{f}$. Quelle est la fréquence mise en évidence ?

Réduction I

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ définis par : $u = (0, 1, -2)$ et $v = (0, 1, -1)$.

On note $\text{Ker}(f)$ le noyau de f et $\text{Im}(f)$ son image.

Si λ est une valeur propre de f , on désigne par $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ .

Partie I : réduction de l'endomorphisme f

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
2. Justifier que f n'est pas bijectif. En déduire, *sans le moindre calcul*, une valeur propre de f .
3. Prouver que u et v sont deux vecteurs propres de f .
Préciser la valeur propre λ (respectivement μ) associée à u (respectivement à v).
Donner la dimension de l'espace propre $E_\lambda(f)$ (respectivement $E_\mu(f)$).
4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
5. Rechercher tous les vecteurs $t = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation $f(t) = t + v$.
6. Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la troisième coordonnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est nulle, tel que la famille $C = (u, v, w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f dans la base C soit la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Déterminer χ_A . Que vaut $\chi_A(A)$?
8. Existe-t-il un polynôme annulateur de A de degré 1 ? de degré 2 ?

Partie II : Résolution d'une équation en endomorphisme

Dans les questions 1, 2 et 3 de cette partie, on suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$g^2 = g \circ g = f$$

1. Montrer que $f \circ g = g \circ f$. En déduire que $f(g(u)) = 0$ et $f(g(v)) = g(v)$.
2. Justifier qu'il existe deux réels a et b tel que $g(u) = au$ et $g(v) = bv$.
3. On note N la matrice de g dans la base (u, v, w) définie à la question I6. Justifier que

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

où a et b sont les deux réels définis à la question précédente et c, d, e des réels.

4. Existe-t-il des endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que $g \circ g = f$?
5. Résoudre $M^2 = A$ où $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Réduction II

Partie I : étude de l'application

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_a : \mathbb{R}_3[x] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P &\longmapsto X(X+1)P''(X) + (aX-1)P'(X)\end{aligned}$$

1. Propriétés élémentaires de $\mathcal{A}_a$

- (a) Montrer que $\mathcal{A}_a$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
- (b) Écrire la matrice M_a de $\mathcal{A}_a$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, $(X^k, 0 \leq k \leq 3)$.
- (c) Étude du cas particulier $a = -4$.

i. La matrice $M_{-4} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

- ii. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\mathcal{A}_{-4}$.
- (d) i. Déterminer en fonction du réel a les valeurs propres de $\mathcal{A}_a$.
- ii. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme $\mathcal{A}_a$ admet-il des valeurs propres doubles ?
- iii. Existe-t-il une valeur du réel a pour laquelle $\mathcal{A}_a$ admet une valeur propre triple ?
- (e) Pour quelles valeurs de a $\mathcal{A}_a$ est-il diagonalisable ?
- (f) Pour quelles valeurs du réel a le degré du polynôme $\mathcal{A}_a(P)$ est-il égal au degré de P , pour tout polynôme P non constant de $\mathbb{R}_3[X]$?

2. Étude de cas particuliers.

On suppose dans tout ce paragraphe que a n'appartient pas à $\{-2, -1, 0\}$.

- (a) Déterminer $\text{Ker}(\mathcal{A}_a)$ par la donnée d'une de ses bases.
- (b) Montrer que $(-1 + aX, X^2, X^3)$ est une base de $\text{Im}(\mathcal{A}_a)$.
- (c) Discuter selon $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq 3$, l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ solution de l'équation :

$$X(X+1)P''(X) + (aX-1)P'(X) = X^p$$

Partie II : quelques propriétés de l'application :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{(a,n)} : \mathbb{R}_n[x] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto X(X+1)P''(X) + (aX-1)P'(X)\end{aligned}$$

- 1. Justifier que $\mathcal{A}_{(a,n)}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2. Écrire la matrice M_a de $\mathcal{A}_{(a,n)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, $(X^k, 0 \leq k \leq n)$.
- 3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est une valeur propre de $\mathcal{A}_{(a,n)}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$ tel que $\lambda = k(a+k-1)$.
- 4. Montrer que si $a \in \mathbb{R}_+^*$, l'endomorphisme $\mathcal{A}_{(a,n)}$ est diagonalisable.
Dans le cas particulier où $a = 0$, $\mathcal{A}_{(a,n)}$ est-il diagonalisable ?

Fin

Exercice 1

1. (a) La fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc continue par morceaux et comme

$$\forall t \in [1, +\infty[, \left| \frac{e^{-xt}}{t} \right| \leq e^{-xt}$$

elle est intégrable sur $[1, +\infty[$ ($x > 0$) d'où la convergence de l'intégrale.

De plus, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt \leq \int_1^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

- (b) On pose f la fonction définie par $f(x, t) = \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$.

$$f(x, t) = \frac{1}{t} (1 - t - (1 - xt) + o_0(t)) = x - 1 + o_0(1) \text{ donc } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} = x - 1$$

- (c) D'après ce qui précède, l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$ est faussement généralisé en 0 puisque la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$ se prolonge en 0 par continuité en une fonction continue sur $[0, 1]$; ainsi $t \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$ est intégrable sur $]0, 1]$.
D'après la question 1.a., les deux intégrales (fonctions positives)

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt$$

convergent absolument, et ainsi

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$$

aussi par différence; on en déduit que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

est absolument convergente.

2. (a) On applique le théorème de dérivation sous le signe intégrale :
- a) pour tout $x \in]0, +\infty[, t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$;
 - b) pour tout $t \in]0, +\infty[, x \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = e^{-xt}$;
 - c) pour tout $x > 0, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = e^{-xt}$ est continue donc continue par morceaux;
 - d) soit $[a, b] \subset]0, +\infty[, \text{ si } x \in [a, b], t \in]0, +\infty[, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at}$ qui est continue

donc continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$.

On en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que $F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$

On en déduit que $F(x) = \ln x + C$. On détermine C à l'aide de $F(1) = C = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0$.

Finalement, on obtient $F(x) = \ln x$.

3. Ainsi, nous avons

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = F(b) - F(a) = \ln b - \ln a$$

Exercice 2

On procède par intégration par parties sur $]0, 1[$ avec

$$\begin{cases} f(t) &= \ln(1+t) \\ g'(t) &= \frac{1}{t} \end{cases} \quad \begin{cases} f'(t) &= \frac{1}{1+t} \\ g(t) &= \ln(t) \end{cases}$$

les fonctions f et g étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$, avec

$$f(t)g(t) = \ln(1+t) \ln(t)$$

et

$$|f(t)g(t)| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t \ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad f(t)g(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1} 0$$

et ainsi les deux intégrales

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt \quad \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} dt$$

sont de même nature, et si elles sont convergentes, on a

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = - \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} dt$$

On vérifie alors la convergence : on a

$$\frac{\ln(1+t)}{t} \underset{0}{\sim} \frac{t}{t} = 1$$

ce qui assure l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ en 0, et comme la fonction est continue en 1, on a aussi l'intégrabilité en 1. Ainsi $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est intégrable sur $]0, 1[$ et donc on a bien la convergence des intégrales.

On a alors

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt \quad \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} dt = \int_0^1 \ln(t) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(t) (-1)^n t^n dt$$

On pose $f_n(t) = (-1)^n \ln(t)t^n$ sur $]0, 1[$, fonction continue, les fonctions f_n étant intégrables pour $n \geq 1$ car f_n prolongeable par continuité sur $[0, 1]$, et pour $n = 0$ comme fonction de référence. On a intégration par parties généralisée usuelle

$$\int_0^1 \ln(t)t^n dt = \underbrace{\left[\frac{\ln(t)t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{t^n}{n+1} dt = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

et comme f_n de signe constant, $\int_0^1 |f_n(t)| dt = \frac{1}{(n+1)^2}$ et ainsi comme la série numérique $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge, on en déduit par application du théorème d'interversion intégrale généralisée - somme infinie que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} dt = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

et ainsi

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Mais il vaut mieux utiliser la première intégrale puisque si $t \in]0, 1[$,

$$\frac{\ln(1+t)}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^{n-1}$$

et

$$\int_0^1 \frac{1}{n} t^{n-1} dt = \frac{1}{n^2}$$

terme général d'une série convergente, et plus facile à calculer !

Transformée de Fourier

1. Soit $\nu \in \mathbb{R}$, nous avons pour tout t réel,

$$|e^{-2i\pi t\nu} f(t)| \leq |f(t)|$$

Ainsi puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$t \mapsto e^{-2i\pi \nu t} f(t)$$

l'est aussi et ainsi on peut définir $\hat{f}(\nu)$.

La fonction $\hat{f}$ est donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. On pose

$$g(\nu, t) = e^{-2i\pi \nu t} f(t)$$

sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

- Pour tout ν , $t \mapsto g(\nu, t)$ est continue par morceaux
- Pour tout t réel, $\nu \mapsto g(\nu, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$
- Pour tout t réel, ν réel, on a

$$|e^{-2i\pi t\nu} f(t)| \leq |f(t)| = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable.

Ainsi d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Si $|t| \geq 1$, on a

$$|t|^{p-1} \leq |t|^p \leq |t|^p + 1$$

Si $|t| \leq 1$, on a

$$|t|^{p-1} \leq 1 \leq |t|^p + 1$$

(b) On a alors

$$|t^{p-1}f(t)| \leq |t^p f(t)| + |f(t)|$$

et ainsi comme f est intégrable et admet un moment d'ordre p , on a $t \mapsto t^{p-1}f(t)$ intégrable par comparaison et ainsi f admet un moment d'ordre $p-1$.

Par récurrence descendante, on en déduit alors que f admet des moments aux ordres $p, p-1, p-2, \dots, 2, 1$.

(c) Vérifions les hypothèses du théorème de classe $\mathcal{C}^p$ pour les intégrales à paramètre.

- Pour tout ν de $\mathbb{R}$, $t \mapsto g(\nu, t)$ est continue par morceaux et intégrable.
- Pour tout t de $\mathbb{R}$, $\nu \mapsto g(\nu, t)$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et on a pour tout j entre 1 et p :

$$\frac{\partial^j g}{\partial \nu^j}(\nu, t) = (-2i\pi t)^j e^{-2i\pi \nu t} f(t)$$

- Pour tout ν de $\mathbb{R}$, pour tout j entre 1 et p , $t \mapsto \frac{\partial^j g}{\partial \nu^j}(\nu, t)$ est continue par morceaux.
- Pour tout ν de $\mathbb{R}$, pour tout j entre 1 et p , on a

$$\left| \frac{\partial^j g}{\partial \nu^j}(\nu, t) \right| = |t^j f(t)| = \varphi_j(t)$$

avec φ_j continue par morceaux et intégrable d'après la question précédente.

Ainsi la transformée de Fourier $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et on a pour tout j entre 0 et p

$$\hat{f}^{(j)}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2i\pi t)^j e^{-2i\pi \nu t} f(t) dt$$

4. Soit $\nu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi \nu t} f(t) dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-2i\pi \nu t} e^{2i\pi \nu_0 t} dt \\ &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{2i\pi(\nu_0 - \nu)t} dt \end{aligned}$$

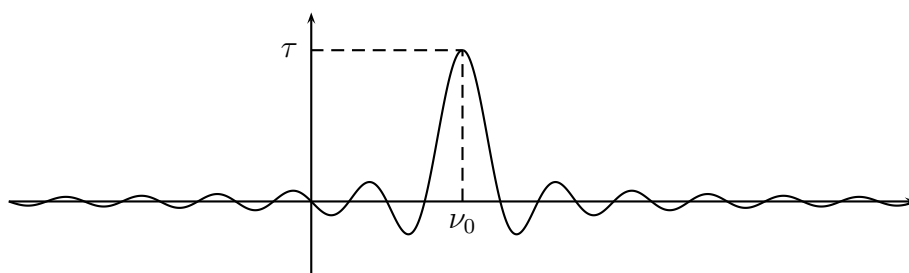
Pour $\nu = \nu_0$, on obtient

$$\hat{f}(\nu_0) = \tau$$

et pour $\nu \neq \nu_0$,

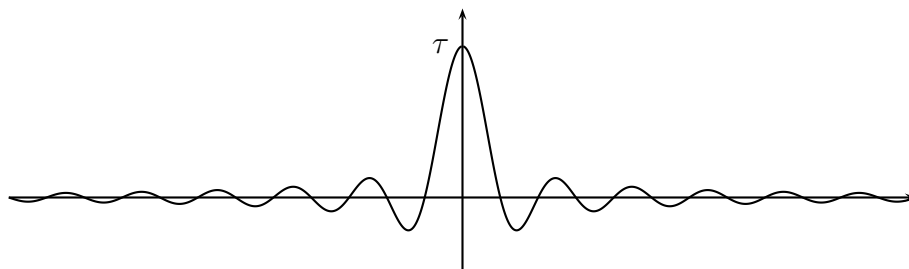
$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\nu) &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{2i\pi(\nu_0 - \nu)t} dt \\
 &= \left[\frac{1}{2i\pi(\nu_0 - \nu)} e^{2i\pi(\nu_0 - \nu)t} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\
 &= \frac{1}{2i\pi(\nu_0 - \nu)} [e^{i\pi(\nu_0 - \nu)\tau} - e^{-i\pi(\nu_0 - \nu)\tau}] \\
 &= \frac{\sin(\pi(\nu_0 - \nu)\tau)}{\pi(\nu_0 - \nu)} = \frac{\sin(\pi(\nu - \nu_0)\tau)}{\pi(\nu - \nu_0)} \\
 &= \tau \text{sinc}(\pi\tau(\nu - \nu_0))
 \end{aligned}$$

Connaissant le graphe de la fonction sinus cardinal, on en déduit le graphe de $\hat{f}$: recentrage en ν_0 (translation selon l'axe des abscisses) et homothétie de τ selon les ordonnées :



ce qui met en évidence la fréquence ν_0 .

5. On applique la question précédente avec $\nu_0 = 0$.



ce qui met en évidence la fréquence 0, ce qui paraît logique pour un signal constant, même constant uniquement sur une durée donnée.

Réduction I

1. Pour déterminer le noyau $\text{Ker } f$, on procède de manière matricielle (ou par le système associé) :

$$\begin{aligned}
 AX = 0 &\iff \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \\
 &\iff (x, y, z) = (0, y, -2y) = y(0, 1, -2)
 \end{aligned}$$

et ainsi $\text{Ker } f = \text{Vect}((0, 1, -2))$, qui est une droite vectorielle dirigée par le vecteur $(0, 1, -2)$.

Les vecteurs colonnes de A forment une famille génératrice de l'image de f , c'est à dire la famille

$$((1, 1, 2), (0, 2, -2), (0, 1, -1))$$

Ainsi (on extrait une base de cette famille génératrice)

$$\text{Im } f = \text{Vect}((1, 1, 2), (0, 2, -2), (0, 1, -1)) = \text{Vect}((1, 1, 2), (0, 1, -1))$$

ces deux derniers vecteurs étant indépendants, on conclut que $((1, 1, 2), (0, 1, -1))$ est une base de $\text{Im } f$.

2. Comme le noyau de f n'est pas réduit au singleton $\{0\}$, f n'est pas injective et donc non bijective.

Le fait que $\text{Ker } f \neq \{0\}$ entraîne que 0 est une valeur propre de f .

3. Le vecteur u est dans le noyau de f et ainsi $f(u) = 0 = 0u$. Pour v , on procède là encore de manière matricielle : on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et ainsi $f(v) = 1v$. Ainsi u et v sont deux vecteurs propres de f , de valeur propre associée 0 et 1 respectivement. On a déjà vu que $E_0(f) = \text{Vect}((0, 1, -2)) = \text{Vect}(u)$, droite vectorielle, de dimension 1. On détermine ensuite $E_1(f)$:

$$\begin{aligned} AX = 1X &\iff \begin{cases} x = x \\ x + 2y + z = y \\ 2x - 2y - z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 & (1) \\ 2x - 2y - 2z = 0 & (2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4x = 0 & 2(1) + (2) \\ z = -y \end{cases} \\ &\iff (x, y, z) = (0, y, -y) = y(0, 1, -1) \end{aligned}$$

et ainsi $E_1(f) = \text{Vect}((0, 1, -1)) = \text{Vect}(v)$, droite vectorielle de dimension 1 aussi.

4. Plusieurs façons de répondre :

- Par l'absurde : si f était diagonalisable, on aurait A semblable à une matrice diagonale, dont les termes sur la diagonales sont les valeurs propres, avec leur multiplicité : on aurait alors (on sait déjà que 0 et 1 sont des valeurs propres)

$$\text{Tr}(A) = 2 = 0 + 1 + \mu$$

et ainsi $\mu = 1$; A admettrait alors 0 et 1 comme valeurs propres, avec 0 de multiplicité 1, 1 de multiplicité 2. Or $\dim E_1(f) = 1$ ce qui contredit le fait que f diagonalisable. Donc f n'est pas diagonalisable.

- On détermine le polynôme caractéristique de f : on obtient facilement $\chi_f(X) = X(X-1)^2$ et on conclut avec les dimensions des espaces propres qui donnent une dimension totale de 2, strictement inférieur à 3.

5. On a

$$\begin{aligned}
 f(t) = t + v &\iff \begin{cases} x = x + 0 \\ x + 2y + z = y + 1 \\ 2x - 2y - z = z - 1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 2y - z = -1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 4x = 1 \\ y = 1 - z - x = \frac{3}{4} - z \end{cases}
 \end{aligned}$$

et ainsi

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} - z, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$$

6. On choisit donc $w = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0 \right)$. On a alors $f(w) = w + v$. On vérifie que (u, v, w) est une base à l'aide du déterminant $\det(u, v, w)$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & \frac{3}{4} \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \neq 0$$

On a alors la matrice de f dans la base (u, v, w) qui est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puisque

$$f(u) = 0 \quad f(v) = v \quad f(w) = v + w$$

et nous avons donc trigonalisé la matrice A de manière optimale.

Partie II

1. On a puisque $g \circ g = f$

$$f \circ g = (g \circ g) \circ g = g \circ (g \circ g) = g \circ f$$

Ainsi

$$f(g(u)) = f \circ g(u) = g \circ f(u) = g(f(u)) = g(0) = 0 \quad f(g(v)) = f \circ g(v) = g \circ f(v) = g(f(v)) = g(v)$$

2. Ainsi $g(u) \in E_0(f) = \text{Vect}(u)$ droite vectorielle et donc il existe un réel a de sorte que $g(u) = au$.

De même $g(v) \in E_1(f) = \text{Vect}(v)$, droite vectorielle et donc il existe un réel b de sorte que $g(v) = bv$.

3. Comme (u, v, w) est une base, on décompose $g(w)$ sur cet base et ainsi

$$g(u) = au \quad g(v) = bv \quad g(w) = cu + dv + ew$$

On peut écrire

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

4. Analyse : si g existe, alors $N^2 = T$ soit

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soit encore

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & ac + ce \\ 0 & b^2 & bd + de \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $a = 0$, $b^2 = 1$, $e^2 = 1$, $ce = 0$, $d(b + e) = 1$; ainsi déjà $a = c = 0$; puis

- $b = e = 1 : d = \frac{1}{2}$;
- $b = e = -1 : d = -\frac{1}{2}$;
- $b = 1, e = -1 : d(b + e) = 0 = 1$ impossible;
- $b = -1, e = 1 : d(b + e) = 0 = 1$ impossible;

On en déduit que les seules matrices de g potentielles sont

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Réciproquement, on vérifie que pour ces matrices, $N^2 = T$ et que donc g désignant l'endomorphisme de matrice N , on a bien $g \circ g = f$.

Il existe donc deux racines carrées de f .

5. Notons M la matrice de g dans la base canonique. Alors $g^2 = f$ si et seulement si $M^2 = A$. Ainsi $M^2 = A$ admet deux solutions qui sont PN_1P^{-1} et PN_2P^{-1} avec P la matrice de passage de la base canonique à la base (u, v, w) . Un élève courageux trouverait

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 1 & 3/4 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et les racines carrées de A sont

$$PN_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad PN_2P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Réduction II

1. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_3[x]$, par propriété des degrés, on a alors

$$X(X+1)P''(X) + (aX-1)P'(X)$$

qui est aussi dans $\mathbb{R}_3[X]$. Ainsi l'application $\mathcal{A}_a$ est bien définie. De plus elle est linéaire : en effet, soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_3[X]$ et λ, μ deux scalaires. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_a(\lambda P + \mu Q) &= X(X+1)(\lambda P + \mu Q)''(X) + (aX-1)(\lambda P + \mu Q)'(X) \\ &= X(X+1)(\lambda P''(X) + \mu Q''(X)) + (aX-1)(\lambda P'(X) + \mu Q'(X)) \\ &= \lambda [X(X+1)P''(X) + (aX-1)P'(X)] \\ &\quad + \mu [X(X+1)Q''(X) + (aX-1)Q'(X)] \\ &= \lambda \mathcal{A}_a(P) + \mu \mathcal{A}_a(Q)\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{A}_a$ est linéaire et donc $\mathcal{A}_a$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

(b) Pour tout k entre 0 et 3, nous avons

$$\mathcal{A}_a(X^k) = X(X+1)k(k-1)X^{k-2} + (aX-1)kX^{k-1} = (k(k-1) + ak)X^k + (k(k-1) - k)X^{k-1}$$

d'où $\mathcal{A}_a(1) = 0$, $\mathcal{A}_a(X) = -1 + aX$ et

$$\mathcal{A}_a(X^2) = (2-2)X + (2+2a)X^2 = 2(1+a)X^2 \quad \mathcal{A}_a(X^3) = (6-3)X^2 + (6+3a)X^3 = 3X^2 + 3(2+a)X^3$$

et ainsi

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+a) & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3(2+a) \end{pmatrix}$$

(c) Dans le cas où $a = -4$, on obtient ainsi

$$M_{-4} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Si M_{-4} était diagonalisable, alors les blocs diagonaux le seraient aussi par restriction, c'est à dire les deux matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

La première matrice a pour polynôme caractéristique $X(X+4)$, scindé à racines simples : elle est diagonalisable ; la seconde admet une valeur propre double -6 alors que la matrice n'est pas diagonale : cette seconde matrice n'est pas diagonalisable.

Ainsi M_{-4} ne peut pas être diagonalisable. Cela sera confirmé par les calculs qui suivent.

On détermine les espaces propres : on a

$$\begin{aligned}M_{-4}X = 0.X &\iff \begin{cases} -y = 0 \\ -4y = 0 \\ -6z + 3t = 0 \\ -6t = 0 \end{cases} \\ &\iff (x, y, z, t) = x(1, 0, 0, 0)\end{aligned}$$

et ainsi $E_0 = \text{Vect}((1, 0, 0, 0)) = \text{Vect}((1))$, droite vectorielle. Et

$$\begin{aligned} M_{-4}X = -4.X &\iff \begin{cases} -y = -4x \\ -4y = -4y \\ -6z + 3t = -4z \\ -6t = -4t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 4x \\ t = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff (x, y, z, t) = x(1, 4, 0, 0) \end{aligned}$$

et ainsi $E_{-4} = \text{Vect}((1, 4, 0, 0)) = \text{Vect}((1 + 4X))$, droite vectorielle. Et

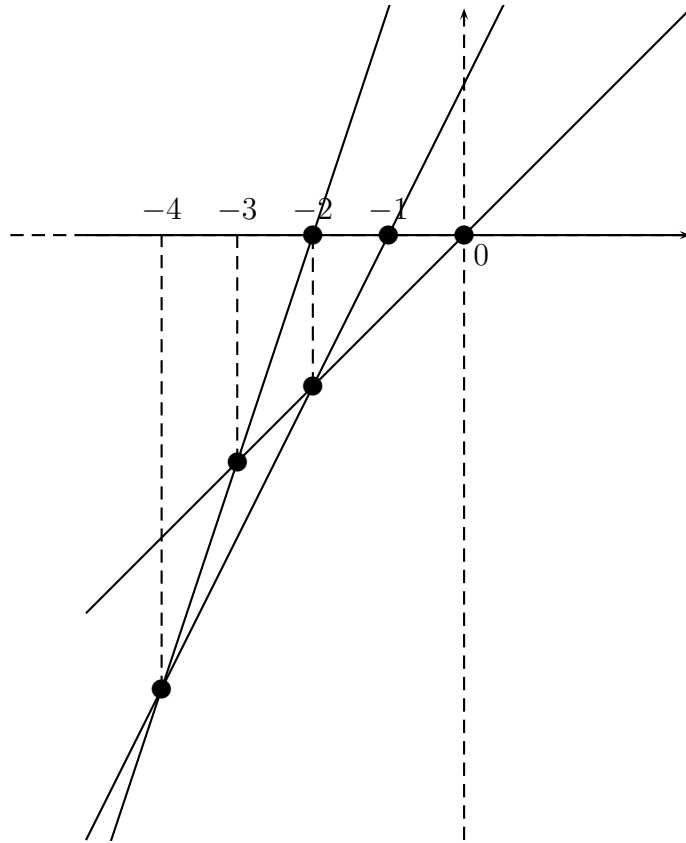
$$\begin{aligned} M_{-6}X = -6.X &\iff \begin{cases} -y = -6x \\ -4y = -6y \\ -6z + 3t = -6z \\ -6t = -6t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ t = 0 \end{cases} \iff (x, y, z, t) = z(0, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

et ainsi $E_{-6} = \text{Vect}((0, 0, 1, 0)) = \text{Vect}((X^2))$, droite vectorielle.

On retrouve bien le fait que M_{-4} n'est pas diagonalisable.

- (d) i. La matrice M_a étant triangulaire, on obtient les valeurs propres : ce sont 0, a , $2 + 2a$ et $6 + 3a$ comptés éventuellement plusieurs fois ; on ne précise pas pour l'instant les multiplicités, puisqu'elles dépendent de la valeur du paramètre a , et que cela est discuté dans les questions qui suivent.
- ii. Analyse : si on a une valeur propre double, alors deux des valeurs 0, a , $2 + 2a$ et $6 + 3a$ sont égales. Réciproquement :
- Si $a = 0$, les valeurs propres sont 0, 2, 6 avec 0 double.
- Si $a = -1$, les valeurs propres sont 0, -1, 3, avec 0 double.
- Si $a = -2$, les valeurs propres sont 0, -2, avec 0 et -2 doubles.
- On a $a = 2 + 2a$ si et seulement si $a = -2$; cas déjà étudié. On a $a = 6 + 3a$ si et seulement si $a = -3$; alors les valeurs propres sont 0, -3, -4 avec -3 double.
- On a $2 + 2a = 6 + 3a$ si et seulement si $a = -4$; alors les valeurs propres sont 0, -4, -6 avec -6 double.

Ainsi $\mathcal{A}_a$ admet une valeur propre double si et seulement si $a \in \{-4, -3, -2, -1, 0\}$. Graphiquement (Florient Lo Surdo - PC) on visualise bien la situation (ce qui permet aussi de répondre à la question suivante), l'abscisse des points d'intersection donnant les possibilités pour a :



- iii. Analyse : si on a une valeur propre triple, alors trois des valeurs $0, a, 2 + 2a$ et $6 + 3a$ sont égales. Réciproquement :
- $0 = a = 2 + 2a$: impossible ;
 - $0 = a = 6 + 3a$: impossible ;
 - $0 = 2 + 2a = 6 + 3a$: impossible ;
 - $a = 2 + 2a = 6 + 3a$: impossible ;

Ainsi $\mathcal{A}_a$ n'a jamais de valeur propre triple.

- (e) Lorsque $a \notin \{-4, -3, -2, -1, 0\}$, M_a de taille 4 possède quatre valeurs propres distinctes et ainsi elle est diagonalisable.

Pour $a = -4$, M_a n'est pas diagonalisable.

Pour $a = 0$, le bloc supérieur gauche n'est pas diagonalisable ; M_0 non plus (on peut aussi voir que 0 d'ordre 2 alors que E_0 de dimension 1).

Pour $a = -1$, on a les valeurs propres 0, 2, 6, et 0 double.

$$M_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On voit que 0 est d'ordre 2 alors que E_0 de dimension 1 : M_{-1} n'est pas diagonalisable.

Pour $a = -3$, les valeurs propres sont 0, -3, -4 avec -3 double.

$$M_{-3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

On a

$$M_{-3}X = -3X \iff \begin{cases} -y = -3x \\ -3y = -3y \\ -4z + 3t = -3z \\ -3t = -3t \end{cases} \\ \iff \begin{cases} y = 3x \\ z = 3t \end{cases} \iff (x, y, z, t) = x(1, 3, 0, 0) + t(0, 0, 3, 1)$$

et ainsi $E_{-6} = \text{Vect}((1, 3, 0, 0), (0, 0, 3, 1))$, de dimension 2. On obtient que M_{-3} est diagonalisable. Finalement, $\mathcal{A}_{-a}$ est diagonalisable si et seulement si $a \notin \{-4, -2, -1, 0\}$.

- (f) Si $P = 0$, alors $\mathcal{A}_a(P) = 0$, de même degré.
Si P constant, $\mathcal{A}_a(P) = 0$.

Si on note $a_k X^k$ le terme dominant de P , alors

$$\mathcal{A}_a(P) = (k(k-1) + ak)a_k X^k + \dots$$

a répond à la question si et seulement si pour $k = 1, 2, 3$, $k(k-1) + ak \neq 0$ soit encore $a \neq 0$, $2 + 2a \neq 0$ et $6 + 3a \neq 0$ c'est à dire $a \notin \{-2, -1, 0\}$.

2. (a) On résout $M_a X = 0X$: on a

$$M_a X = 0X \iff \begin{cases} -y = 0 \\ ay = 0 \\ 2(1+a)z + 3t = 0 \\ 3(2+a)t = 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} y = 0 \\ t = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff (x, y, z, t) = x(1, 0, 0, 0)$$

et ainsi $E_0 = \text{Vect}((1, 0, 0, 0))$, droite vectorielle de base $((1, 0, 0, 0))$, soit en termes de polynômes $E_0 = \mathbb{R}$ espace des polynômes constants.

- (b) Les colonnes de M_a forment une famille génératrice de l'image de $\mathcal{A}_a$, c'est à dire la famille

$$0, -1 + aX, 2(1+a)X^2, 3X^2 + 3(2+a)X^3$$

Ainsi la famille $(-1 + aX, X^2, 3X^2 + 3(2+a)X^3)$, puis $(-1 + aX, X^2, 3(2+a)X^3)$ et finalement $(-1 + aX, X^2, X^3)$ est génératrice de $\text{Im } \mathcal{A}_a$: comme c'est une famille de polynômes de degrés échelonnés, c'est une base de $\text{Im } \mathcal{A}_a$.

- (c) Les polynômes constants ne sont pas solution de toute façon. On cherche à résoudre

$$\mathcal{A}_a(P) = X^p$$

On rappelle que de manière générale, l'ensemble des solution est soit vide (si $X^p \in \text{Im } \mathcal{A}$, soit de la forme $\text{Ker } \mathcal{A}_a + P_0$ avec P_0 une solution particulière.

• Pour $p = 0$, $X^0 = 1$, $\mathcal{A}_a(P) = 1$ n'a pas de solution : les polynômes constants ne sont pas solution et si P non constant, et on sait que $\mathcal{A}_a(P)$ de degré celui de P sinon, ce qui empêche P d'être solution. On peut aussi invoquer le fait que 1 n'est

pas dans $\text{Im } A_a$.

- Pour $p = 1$, si X n'est pas dans $\text{Im } A_a$: si on avait

$$X = \alpha(-1 + aX) + \beta X^2 + \gamma X^3$$

alors on aurait $-\alpha + (\alpha a - 1)X + \beta X^2 + \gamma X^3 = 0$ puis $\alpha = \beta = \gamma = 0$, et $-1 = 0$ (coefficient en X), ce qui est absurde. Ainsi dans ce cas il n'y a pas de solution.

- $p = 2$: X^2 est dans l'image de $\mathcal{A}_a$. Posons $P = u + vX + wX^2 + xX^3$, P solution si et seulement si matriciellement

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+a) & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3(2+a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ av \\ 2(1+a)w + 3x \\ 3(2+a)x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit encore $x = v = 0, w = \frac{1}{3(1+a)}$. Ainsi l'ensemble des solutions est

$$\left\{ u + \frac{1}{3(1+a)} X^2, u \in \mathbb{R} \right\}$$

- $p = 3$: X^3 est dans l'image de $\mathcal{A}_a$. Posons $P = u + vX + wX^2 + xX^3$, P solution si et seulement si matriciellement

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+a) & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3(2+a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ av \\ 2(1+a)w + 3x \\ 3(2+a)x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit encore $v = 0, x = \frac{1}{3(2+a)}, w = -\frac{1}{2(1+a)(2+a)}$. Ainsi l'ensemble des solutions est

$$\left\{ u - \frac{1}{2(1+a)^2} X^2 + \frac{1}{3(1+a)} X^3, u \in \mathbb{R} \right\}$$

Partir II

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$, par propriété des degrés, on a alors

$$X(X+1)P''(X) + (aX-1)P'(X)$$

qui est aussi dans $\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi l'application $\mathcal{A}_a$ est bien définie. De plus elle est linéaire : en effet, soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et λ, μ deux scalaires. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_a(\lambda P + \mu Q) &= X(X+1)(\lambda P + \mu Q)''(X) + (aX-1)(\lambda P + \mu Q)'(X) \\ &= X(X+1)(\lambda P''(X) + \mu Q''(X)) + (aX-1)(\lambda P'(X) + \mu Q'(X)) \\ &= \lambda [X(X+1)P''(X) + (aX-1)P'(X)] \\ &= \quad + \mu [X(X+1)Q''(X) + (aX-1)Q'(X)] \\ &= \lambda \mathcal{A}_a(P) + \mu \mathcal{A}_a(Q) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{A}_a$ est linéaire et donc $\mathcal{A}_a$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Pour tout k entre 0 et n , nous avons (valable aussi si $k = 0$)

$$\mathcal{A}_a(X^k) = X(X+1)k(k-1)X^{k-2} + (aX-1)kX^{k-1} = (k(k-1)+ak)X^k + (k(k-1)-k)X^{k-1}$$

d'où $\mathcal{A}_a(1) = 0$, $\mathcal{A}_a(X) = -1 + aX$ et

$$\mathcal{A}_a(X^2) = (2-2)X + (2+2a)X^2 = 2(1+a)X^2 \quad \mathcal{A}_a(X^3) = (6-3)X^2 + (6+3a)X^3 = 3X^2 + 3(2+a)X^3$$

et de manière générale

$$\mathcal{A}_a(X^k) = k(k + (a - 1))X^k + k(k - 2)X^{k-1}$$

et ainsi

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 2(1+a) & 3 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 3(2+a) & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & k(k-2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & k(k+a-1) & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & n(n-2) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n(n+a-1) \end{pmatrix}$$

3. Comme la matrice est triangulaire, le polynôme caractéristique de $\mathcal{A}_a$ est

$$X_{\mathcal{A}}(X) = \prod_{k=0}^n (X - k(k + a - 1))$$

d'où le résultat.

4. Si $a > 0$, les racines du polynômes caractéristique sont

$$0, a, 2(1+a), \dots, k(k+a-1), \dots, n(n+a-1)$$

deux à deux distinctes, et ainsi le polynôme caractéristique est scindé à racines simples : $\mathcal{A}_a$ est diagonalisable.

Si $a = 0$, 0 est valeur propre double, et les autres valeurs propres

$$2, 6, \dots, k(k-1), n(n-1)$$

sont toutes simples ; on vérifie aisément que E_0 de dimension 1 ; ainsi $\mathcal{A}_{0,n}$ n'est pas diagonalisable.