

Devoir surveillé n°8

4 heures

Exercice I : matrices symétriques positives

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques réelles. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ telle que $S = PDP^T = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale.
2. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, montrer que

$$Y^T D Y = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2$$

3. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $Y = P^T X$, montrer que

$$X^T S X = Y^T D Y = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2$$

4. En déduire que si $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+$, alors

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T S X \geq 0.$$

5. Réciproquement, on suppose que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T S X \geq 0.$$

et on considère $\lambda \in \text{Sp}(S)$ ainsi que X non nul de sorte que $SX = \lambda X$. Montrer que $\lambda \geq 0$.

Ainsi lorsque S est une matrice symétrique, il y a équivalence entre $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+$ et la condition

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T S X \geq 0.$$

On dit alors que S est une matrice symétrique réelle positive et on note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques positives.

6. Montrer que si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il a équivalence entre :

- (1) $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
- (2) $\exists B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), S = B^2$.

7. A.N. Soit J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 et α un réel. On pose

$$M = -J + (\alpha + 1)I_n$$

Justifier que J est diagonalisable. Quel est son rang ? Déterminer les éléments propres de J et en déduire ceux de M .

Pour quelles valeurs de α a-t-on $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$?

Exercice II (cours)

1. (*) Montrer que N définie sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ par

$$N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt$$

est une norme sur E .

2. (*) On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions croissantes de E . La partie $\mathcal{C}$ est-elle convexe ?
3. (*) La partie $\mathcal{C}$ est-elle bornée par la norme N ?

Exercice III

On fixe dans ce problème un espace vectoriel euclidien E de dimension 4. Étant donné $(x, y) \in E^2$, on note (x, y) leur produit scalaire, et $\|x\|$ la norme euclidienne de x .

On appelle quart de tour tout automorphisme orthogonal $q \in \mathcal{O}(E)$ tel que $q \circ q = -\text{id}_E$. On note $\mathcal{Q}$ l'ensemble des quarts de tours.

On note enfin

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Soit q un quart de tour et $x \in E$ un vecteur unitaire. Montrer que $q(x)$ est un vecteur unitaire orthogonal à x .
2. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E , et $q \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q) = M$. Montrer que q est un quart de tour.
3. Soit q un quart de tour et $x \in E$ un vecteur unitaire. On pose $P = \text{Vect}(x, q(x))$. Montrer que P est un plan vectoriel stable par q , et que $(x, q(x))$ en est une base orthonormale. Préciser la matrice dans cette base de l'endomorphisme induit q_P . Quelle est la nature géométrique de cet endomorphisme ?
4. Montrer que le sous espace $P^\perp$ est également stable par l'endomorphisme q .
5. À l'aide des questions 3 et 4, montrer qu'il existe une base orthonormale $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ telle que $\mathcal{M}_B(q) = M$. Quel est le déterminant de q ?
6. Soit $q \in \mathcal{Q}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f = \cos(\alpha)\text{id}_E + \sin(\alpha)q$. Montrer que $f \in \mathcal{O}(E)$. Soit $x \in E$ un vecteur unitaire. Montrer que x est contenu dans un plan P stable par f . Quelle est la nature géométrique de l'endomorphisme induit par f sur P ? Quel est le déterminant de f ?
7. Soit (x, y) une famille orthonormale de E . Combien existe-t-il de quarts de tours q tels que $q(x) = y$?

Exercice IV

On considère la matrice A définie par

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A \in SO(3) \setminus \{I_3\}$. On pourra noter u l'isométrie vectorielle canoniquement associée.

2. Déterminer $D = \text{Ker}(A - I_3)$ ainsi que e_1 vecteur unitaire de D . On choisira $e_1 = (a, b, c)$ de sorte que $b > 0$.
3. En déduire qu'une équation cartésienne canonique de $P = D^\perp$ est $y - 2z = 0$.
4. On pose $e_2(1, 0, 0)$. Déterminer e_3 de sorte que (e_2, e_3) soit une base orthonormée de P . On choisira e_3 de sorte que sa seconde coordonnée soit positive.
5. Justifier que P est stable par u . En déduire qu'il existe θ réel unique modulo 2π de sorte que la matrice de u dans (e_1, e_2, e_3) soit

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

6. Montrer que $\text{Tr}(A) = 1 + 2\cos \theta$ et en déduire la valeur de $\cos \theta$. Peut-on en déduire θ modulo 2π ?
7. Montrer que $(u(e_2)|e_3) = \sin \theta(e_3|e_3)$ et en déduire $\sin \theta$.

Problème

On se place dans un espace euclidien $(E, (\cdot | \cdot))$. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est antisymétrique si

$$\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = -(x|u(y)).$$

On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E .

1. Montrer que $\mathcal{A}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et A la matrice de u dans une base orthonormée. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si $A^T = -A$ c'est à dire A antisymétrique. En déduire la dimension de $\mathcal{A}(E)$.
3. Montrer que si $u \in \mathcal{A}(E)$, alors

$$\det(u) = (-1)^{\dim E} \det(u)$$

Que peut-on en déduire selon la parité de $\dim E$?

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre :
 - 1) u antisymétrique
 - 2) $\forall x \in E, (u(x)|x) = 0$.
5. Soit $u \in \mathcal{A}(E)$.
 - (a) Montrer que $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$.
 - (b) En déduire que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont supplémentaires dans E .
 - (c) Montrer que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont orthogonaux.
 - (d) On suppose que $u \neq 0$. Par la stabilité de $\text{Im}(u)$ par u , on considère l'endomorphisme v induit par u sur $\text{Im}(u)$. Montrer que v est antisymétrique et un automorphisme. En déduire que $\text{rg}(u)$ est pair. Et si $u = 0$?
6. Soit A antisymétrique réelle de taille n . On considère une valeur propre complexe λ de A , et X un vecteur propre complexe associé.
 - (a) Montrer que $\overline{X}^T X \in \mathbb{R}_+^*$.

- (b) Montrer que $\overline{X}^T A X = \lambda \overline{X}^T X = -\overline{\lambda} \cdot \overline{X}^T X$.
 - (c) En déduire que $\lambda \in i\mathbb{R}$.
 - (d) Montrer que si n impair, 0 est valeur propre de A . Et si n est pair ?
7. Soit u antisymétrique. On pose $s = u^2 = u \circ u$.
- (a) Montrer que s est un endomorphisme symétrique.
 - (b) Soit λ une valeur propre de s , et x un vecteur propre associé (non nul). Montrer que

$$(s(x)|x) = \lambda \|x\|^2 = -\|u(x)\|^2$$

En déduire que $\lambda \leq 0$. Que peut-on dire de $-s$?

- (c) On suppose ici $\det(u) \neq 0$, c'est à dire u bijectif. On pose $F = \text{Vect}(x, u(x))$. Montrer que F est un plan stable par u et que la matrice de l'endomorphisme induit de u sur F est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

avec $b > 0$.

- (d) En déduire, sans donner la preuve précise, mais en indiquant la méthodologie, que E est la somme directe orthogonale de plans stables par u . En déduire que $\dim E$ est pair et donner la forme d'une réduction simple de la matrice de u dans une base orthonormée.
- Et si $\det(u) = 0$?
- Finalement, rédiger une preuve précise.

Fin