

Devoir surveillé n°8

4 heures

Exercice I : matrices symétriques positives

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques réelles. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ telle que $S = PDP^T = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale.
2. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, montrer que

$$Y^T DY = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2$$

3. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $Y = P^T X$, montrer que

$$X^T SX = Y^T DY = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2$$

4. En déduire que si $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+$, alors

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T SX \geq 0.$$

5. Réciproquement, on suppose que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T SX \geq 0.$$

et on considère $\lambda \in \text{Sp}(S)$ ainsi que X non nul de sorte que $SX = \lambda X$. Montrer que $\lambda \geq 0$.

Ainsi lorsque S est une matrice symétrique, il y a équivalence entre $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+$ et la condition

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T SX \geq 0.$$

On dit alors que S est une matrice symétrique réelle positive et on note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques positives.

6. Montrer que si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il a équivalence entre :

- (1) $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
- (2) $\exists B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), S = B^2$.

7. A.N. Soit J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 et α un réel. On pose

$$M = -J + (\alpha + 1)I_n$$

Justifier que J est diagonalisable. Quel est son rang ? Déterminer les éléments propres de J et en déduire ceux de M .

Pour quelles valeurs de α a-t-on $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$?

Exercice II (cours)

1. (*) Montrer que N définie sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ par

$$N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt$$

est une norme sur E .

2. (*) On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions croissantes de E . La partie $\mathcal{C}$ est-elle convexe ?
3. (*) La partie $\mathcal{C}$ est-elle bornée par la norme N ?

Exercice III

On fixe dans ce problème un espace vectoriel euclidien E de dimension 4. Étant donné $(x, y) \in E^2$, on note (x, y) leur produit scalaire, et $\|x\|$ la norme euclidienne de x .

On appelle quart de tour tout automorphisme orthogonal $q \in \mathcal{O}(E)$ tel que $q \circ q = -\text{id}_E$. On note $\mathcal{Q}$ l'ensemble des quarts de tours.

On note enfin

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Soit q un quart de tour et $x \in E$ un vecteur unitaire. Montrer que $q(x)$ est un vecteur unitaire orthogonal à x .
2. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E , et $q \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q) = M$. Montrer que q est un quart de tour.
3. Soit q un quart de tour et $x \in E$ un vecteur unitaire. On pose $P = \text{Vect}(x, q(x))$. Montrer que P est un plan vectoriel stable par q , et que $(x, q(x))$ en est une base orthonormale. Préciser la matrice dans cette base de l'endomorphisme induit q_P . Quelle est la nature géométrique de cet endomorphisme ?
4. Montrer que le sous espace $P^\perp$ est également stable par l'endomorphisme q .
5. À l'aide des questions 3 et 4, montrer qu'il existe une base orthonormale $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ telle que $\mathcal{M}_B(q) = M$. Quel est le déterminant de q ?
6. Soit $q \in \mathcal{Q}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f = \cos(\alpha)\text{id}_E + \sin(\alpha)q$. Montrer que $f \in \mathcal{O}(E)$. Soit $x \in E$ un vecteur unitaire. Montrer que x est contenu dans un plan P stable par f . Quelle est la nature géométrique de l'endomorphisme induit par f sur P ? Quel est le déterminant de f ?
7. Soit (x, y) une famille orthonormale de E . Combien existe-t-il de quarts de tours q tels que $q(x) = y$?

Exercice IV

On considère la matrice A définie par

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A \in SO(3) \setminus \{I_3\}$. On pourra noter u l'isométrie vectorielle canoniquement associée.

2. Déterminer $D = \text{Ker}(A - I_3)$ ainsi que e_1 vecteur unitaire de D . On choisira $e_1 = (a, b, c)$ de sorte que $b > 0$.
3. En déduire qu'une équation cartésienne canonique de $P = D^\perp$ est $y - 2z = 0$.
4. On pose $e_2(1, 0, 0)$. Déterminer e_3 de sorte que (e_2, e_3) soit une base orthonormée de P . On choisira e_3 de sorte que sa seconde coordonnée soit positive.
5. Justifier que P est stable par u . En déduire qu'il existe θ réel unique modulo 2π de sorte que la matrice de u dans (e_1, e_2, e_3) soit

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

6. Montrer que $\text{Tr}(A) = 1 + 2\cos \theta$ et en déduire la valeur de $\cos \theta$. Peut-on en déduire θ modulo 2π ?
7. Montrer que $(u(e_2)|e_3) = \sin \theta(e_3|e_3)$ et en déduire $\sin \theta$.

Problème

On se place dans un espace euclidien $(E, (\cdot | \cdot))$. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est antisymétrique si

$$\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = -(x|u(y)).$$

On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E .

1. Montrer que $\mathcal{A}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et A la matrice de u dans une base orthonormée. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si $A^T = -A$ c'est à dire A antisymétrique. En déduire la dimension de $\mathcal{A}(E)$.
3. Montrer que si $u \in \mathcal{A}(E)$, alors

$$\det(u) = (-1)^{\dim E} \det(u)$$

Que peut-on en déduire selon la parité de $\dim E$?

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre :
 - 1) u antisymétrique
 - 2) $\forall x \in E, (u(x)|x) = 0$.
5. Soit $u \in \mathcal{A}(E)$.
 - (a) Montrer que $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$.
 - (b) En déduire que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont supplémentaires dans E .
 - (c) Montrer que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont orthogonaux.
 - (d) On suppose que $u \neq 0$. Par la stabilité de $\text{Im}(u)$ par u , on considère l'endomorphisme v induit par u sur $\text{Im}(u)$.
Montrer que v est antisymétrique et un automorphisme.
En déduire que $\text{rg}(u)$ est pair. Et si $u = 0$?
6. Soit A antisymétrique réelle de taille n . On considère une valeur propre complexe λ de A , et X un vecteur propre complexe associé.
 - (a) Montrer que $\overline{\lambda}^T X \in \mathbb{R}_+^*$.

- (b) Montrer que $\overline{X}^T A X = \lambda \overline{X}^T X = -\overline{\lambda} \cdot \overline{X}^T X$.
 - (c) En déduire que $\lambda \in i\mathbb{R}$.
 - (d) Montrer que si n impair, 0 est valeur propre de A . Et si n est pair ?
7. Soit u antisymétrique. On pose $s = u^2 = u \circ u$.
- (a) Montrer que s est un endomorphisme symétrique.
 - (b) Soit λ une valeur propre de s , et x un vecteur propre associé (non nul). Montrer que

$$(s(x)|x) = \lambda \|x\|^2 = -\|u(x)\|^2$$

En déduire que $\lambda \leq 0$. Que peut-on dire de $-s$?

- (c) On suppose ici $\det(u) \neq 0$, c'est à dire u bijectif. On pose $F = \text{Vect}(x, u(x))$. Montrer que F est un plan stable par u et que la matrice de l'endomorphisme induit de u sur F est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

avec $b > 0$.

- (d) En déduire, sans donner la preuve précise, mais en indiquant la méthodologie, que E est la somme directe orthogonale de plans stables par u . En déduire que $\dim E$ est pair et donner la forme d'une réduction simple de la matrice de u dans une base orthonormée.
- Et si $\det(u) = 0$?
- Finalement, rédiger une preuve précise.

Fin

I : matrices symétriques positives

1. La matrice S étant symétrique réelle, elle est diagonalisable à l'aide d'une base orthonormée et ainsi il existe une matrice P orthogonale telle que $P^{-1}SP = P^TSP = D$ soit diagonale. On a alors $S = PDP^{-1} = PDP^T$.
2. En effectuant matriciellement le produit, on a

$$Y^T DY = (y_1 \cdots y_j \cdots y_n) \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2$$

3. On a $X = PY$ et ainsi

$$X^T SX = (PY)^T PDP^T PY = Y^T DY = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2$$

4. Si $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+$, alors $d_1, \dots, d_n \geq 0$ et ainsi

$$X^T SX = (PY)^T PDP^T PY = Y^T DY = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2 \geq 0$$

5. Réciproquement, si $\lambda \in \text{Sp}(S)$, X un vecteur propre associé, on a $SX = \lambda X$ et $X^T SX \geq 0$ et ainsi

$$X^T SX = X^T (\lambda X) = \lambda X^T X \geq 0$$

avec $X^T X = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ puisque $X \neq 0$ et ainsi on en déduit que $\lambda \geq 0$.

6. Si S est symétrique positive, comme

$$S = PDP^T$$

avec D diagonale, à termes diagonaux positifs, on pose

$$B = D\Lambda P^T$$

avec $\Lambda = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})$. Alors

$$B^2 = P\Lambda P^T P\Lambda P^T = P\Lambda^2 P^T = PDP^T = S$$

et

$$B^T = (P\Lambda P^T)^T = P\Lambda^T P = P\Lambda P^T = B$$

et ainsi B est symétrique et réelle, avec $S = B^2$.

Réciproquement, si on a $S = B^2$ avec B symétrique réelle, alors

$$S^T = (BB)^T = B^T B^T = BB = B^2 = S$$

et ainsi S est symétrique et réelle. De plus, par exemple, pour tout X matrice colonne réelle, on a

$$X^T SX = X^T BBX = X^T B^T BX = (BX)^T BX = \|BX\|^2 \geq 0$$

et ainsi S est symétrique réelle positive.

7. La matrice J est symétrique réelle et ainsi elle est diagonalisable ; elle est de rang 1. Ainsi son noyau est de dimension $n - 1$ et donc 0 est valeur propre avec un espace propre de dimension $n - 1$, espace propre dont une équation cartésienne est

$$x_1 + \dots + x_n = 0$$

dont une base est par exemple

$$((1, -1, 0, \dots, 0), \dots, (1, 0, \dots, 0, -1))$$

Comme J est diagonalisable, et que $\text{Tr}(J) = n = 0 \times (n - 1) + 1 \times n$, on en déduit que n est valeur propre, avec un espace propre qui est une droite vectorielle. Or $J.u = n.u$ ou u désigne le vecteur dont les coordonnées sont toutes égales à 1. Ainsi l'espace propre associé à 1 est la droite vectorielle engendré par u .

Il existe une matrice P de passage orthogonale de sorte que

$$P^{-1}JP = P^TJP = \begin{pmatrix} 0_{n-1, n-1} & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = D$$

et ainsi nous obtenons directement

$$P^TMP = -P^TJP + (\alpha + 1)I_n = \begin{pmatrix} (\alpha + 1)_{n-1, n-1} & 0 \\ 0 & \alpha + 1 - n \end{pmatrix}$$

Le spectre de M est $\{\alpha + 1, \alpha + 1 - n\}$, contenu dans $\mathbb{R}^+$ si et seulement si on a $\alpha \geq n - 1$, qui est donc la condition nécessaire et suffisante pour que M soit symétrique positive.

II

1. Soit $f \in E$, si $N(f) = 0$, alors $|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt = 0$, et ainsi (somme de deux termes positifs) on a $|f(0)| = 0$ et $\int_0^1 |f'(t)|dt = 0$, et comme $t \mapsto |f'(t)|$ continue et positive d'intégrale nulle, elle est nulle et ainsi $f' = 0$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et donc f constante sur $[0, 1]$, avec $f(0) = 0$ et ainsi finalement $f = 0$.

Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$N(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(t)|dt = |\lambda|N(f)$$

Soit f et g deux éléments de E , on a

$$\begin{aligned} N(f + g) &= |(f + g)(0)| + \int_0^1 |(f + g)'(t)|dt \\ &\leq |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 (|f'(t)| + |g'(t)|)dt \\ &= N(f) + N(g) \end{aligned}$$

Ainsi N définie bien une norme sur E .

2. Soit f et g deux éléments de $\mathcal{C}$, $t \in [0, 1]$, $h = tf + (1 - t)g$, on a $h \in E$ (de toute façon E espace vectoriel) et $h' = tf' + (1 - t)g' \geq 0$ puisque $t, f', 1 - t$ et g' positifs. Ainsi h est encore dans $\mathcal{C}$.
Ainsi $\mathcal{C}$ est une partie convexe de E .
3. Soit $f_n(t) = nt$, on a $f_n \in E$, croissante, donc élément de $\mathcal{C}$ et $N(f_n) = n$ et ainsi $N(f_n) \rightarrow +\infty$ si n tend vers $+\infty$ et donc la partie $\mathcal{C}$ ne peut pas être bornée.

III : quart de tour en dimension 4

1. Soit q un quart de tour et $x \in E$ un vecteur unitaire. On a déjà $q(x)$ unitaire puisque q orthogonal et donc conserve la norme et comme q conserve le produit scalaire

$$(q(x)|x) = (q(q(x))|q(x)) = (-x|q(x)) = -(q(x)|x)$$

et donc $(q(x)|x) = 0$. Donc $q(x)$ est un vecteur unitaire orthogonal à x .

2. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E , et $q \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathcal{M}_B(q) = M$. On a

$$M^2 = -I_4$$

et ainsi $q^2 = -\text{id}_E$, et comme $M^T M = I_4$, q orthogonal. Donc q est un quart de tour.

3. Soit q un quart de tour et $x \in E$ un vecteur unitaire. On pose $P = \text{Vect}(x, q(x))$. Comme $q(x)$ unitaire orthogonal à x , $(x, q(x))$ libre et P est un plan vectoriel. De plus

$$q(x) \in P \quad q(q(x)) = -x \in P$$

et ainsi P est stable par q . On a $(x, q(x))$ qui est une base orthonormale de P . La matrice dans cette base de l'endomorphisme induit q_P est alors

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = R\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

et ainsi q_P est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, si P orienté par $(x, q(x))$.

4. Le sous espace $P^\perp$ est également stable par l'endomorphisme q par propriété du cours des isométries vectorielles.

Sinon, on peut refaire la preuve (non triviale dans le cas général d'une isométrie vectorielle quelconque) sur cette situation particulière. Montrons donc que $q(P^\perp) \subset P^\perp$.

Soit $y \in q(P^\perp)$, on a $y = q(z)$ avec $z \in P^\perp$. Soit $t \in P$, on écrit $t = \alpha x + \beta q(x)$. Alors

$$\begin{aligned} (y|t) &= (q(z)|t) = (q(z)|\alpha x + \beta q(x)) \\ &= \alpha(q(z)|x) + \beta(q(z)|q(x)) \\ &= \alpha(q(q(z))|q(x)) + \beta(z|x) \\ &= \alpha(-z|q(x)) + \beta(z|x) = 0 \end{aligned}$$

et ainsi $y \in P^\perp$.

5. On choisit e_1 unitaire, $(e_1, q(e_1))$ orthonormale, on pose $e_2 = q(e_1)$, $P = \text{Vect}(e_1, q(e_1))$, puis $e_3 \in P^\perp$, $e_4 = q(e_3) \in P^\perp$ par stabilité, (e_3, e_4) est aussi orthonormale, base de $P^\perp$, et ainsi $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormée et on a $\mathcal{M}_B(q) = M$. On a donc alors par blocs $\det(q) = \det(M) = 1$.

6. Soit $q \in \mathcal{Q}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f = \cos(\alpha)\text{id}_E + \sin(\alpha)q$. La matrice de f dans la base initiale est alors

$$A = \cos \alpha I_4 + \sin \alpha M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\alpha) & 0 \\ 0 & R(\alpha) \end{pmatrix}$$

On constate que A est orthogonale par $A^T A = I_4$ en utilisant les blocs, et donc $f \in \mathcal{O}(E)$ et comme on a $\det(f) = 1$, f est un élément de $SO(E)$.

Soit $x \in E$ un vecteur unitaire. On $f(x) = \cos(\alpha)x + \sin(\alpha)q(x)$. On pose $P = \text{Vect}(x, q(x))$ qui est un plan d'après ci-dessus. On a $f(x) \in P$ et

$$f(q(x)) = \cos(\alpha)q(x) + \sin(\alpha)q^2(x) = -\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)q(x) \in P$$

Donc P est stable par f . Ainsi x est contenu dans le plan P stable par f . La matrice de f restreinte à P dans la base $(x, q(x))$ de P est

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

et ainsi on reconnaît que l'endomorphisme induit par f sur P est une rotation, d'angle α si P orienté par $(x, q(x))$.

7. Soit (x, y) une famille orthonormale de E , que l'on complète en base orthonormale (x, y, z, t) .

Analyse : soit q est un quart de tour tel que $q(x) = y$. On pose $P = \text{Vect}(x, y)$, $P^\perp = \text{Vect}(z, t)$. Alors on a vu que la matrice de q dans (a, y, z, t) est M ce qui prouve l'unicité de q .

Synthèse : si q est l'endomorphisme de matrice M , on a vu que q est un quart de tour, et on a bien $q(x) = y$.

Ainsi il existe un unique quart de tour qui transforme x en y .

IV : une rotation de l'espace

On considère la matrice A définie par

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. On a $A \neq I_3$. On vérifie que $A^T A = I_3$ et que $\det(A) = 1$.
2. On détermine $D = \text{Ker}(A - I_3)$. On a

$$\begin{aligned} AX = X &\iff \begin{cases} -2x - 2y - z = 3x \\ 2x - y - 2z = 3y \\ x - 2y + 2z = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} -5x - 2y - z = 0 \\ 2x - 4y - 2z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -5x - 2y - z = 0 & (1) \\ x - 2y - z = 0 & (2) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 & (2) - (1) \\ z = -2y \end{cases} \\ &\iff (x, y, z) = (0, y, -2y) = y(0, 1, -2) \end{aligned}$$

Ainsi $D = \text{Vect}((0, 1, -2))$. On choisit $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, -2)$.

- On a $(x, y, z) \in D^\perp$ si et seulement si $(x, y, z) \cdot (0, 1, -2) = 0$ soit $y - 2z = 0$. Ainsi une équation cartésienne canonique de $P = D^\perp$ est $y - 2z = 0$.
- On pose $e_2(1, 0, 0)$. On a $e_2 \in P$. Tout vecteur $(0, y, z)$ est orthogonal à e_2 et il est dans P si $y = 2z$. On choisit alors $e_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1)$. Ainsi (e_2, e_3) est une base orthonormée de P .
- Comme D est stable par u , $P = D^\perp$ aussi, et ainsi la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) est de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & B' \end{pmatrix}$$

et comme A' est orthogonale positive, B' aussi aussi, et donc il existe θ réel unique modulo 2π de sorte que la matrice de u dans (e_1, e_2, e_3) soit

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- Par invariance de la trace, $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A') = 1 + 2\cos \theta$ et $\text{Tr}(A) = -\frac{1}{3}$ et ainsi $\cos \theta = -\frac{2}{3}$. Peut-on en déduire θ modulo 2π ? Non, bien sûr. On peut déterminer θ au signe près.
- Donc $u(e_2)|_{e_3} = \sin \theta(e_3|e_3)$. Numériquement, matriciellement

$$\sin \theta = (u(e_2)|e_3) = \frac{1}{3 \times \sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

et donc $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Nous avons donc θ complètement défini, modulo 2π bien sûr.

Problème

- On a $\mathcal{A}(E)$ sous ensemble de $\mathcal{L}(E)$, non vide puisque l'endomorphisme nul est antisymétrique.
Soit $(u, v) \in \mathcal{A}(E)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors on a $\lambda u + \mu v$ qui est un endomorphisme de E et pour tout x et y de E

$$\begin{aligned} ((\lambda u + \mu v)(x)|y) &= (\lambda u(x) + \mu v(x)|y) \\ &= \lambda(u(x)|y) + \mu(v(x)|y) \\ &= -\lambda(x|u(y)) - \mu(x|v(y)) \\ &= -(x|(\lambda u + \mu v)(y)) \end{aligned}$$

et ainsi $\lambda u + \mu v \in_m \text{thcal} \mathcal{A}(E)$. Donc $\mathcal{A}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et A la matrice de u dans une base orthonormée. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si $A^T = -A$ c'est à dire A antisymétrique.

Ainsi la dimension de $\mathcal{A}(E)$ est celle de l'espace ds matrices antisymétriques, soit

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

3. Soit $u \in \mathcal{A}(E)$, alors si A est la matrice de u dans une base orthonormée, on a $A^T = -A$ et ainsi

$$\det(A^T) = \det(A) = (-1)^n \det(A)$$

et donc $\det(u) = (-1)^{\dim E} \det(u)$. Ainsi :

- si $\dim E$ pair, $\det(A) = \det(A)$ ce qui n'apporte aucune information ;
- si $\dim E$ impair, $\det(A) = -\det(A)$ et donc $\det(A) = 0$: la matrice A n'est pas inversible.

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u antisymétrique. Soit $x \in E$, on a par antisymétrie de u

$$(u(x)|x) = -(x|u(x))$$

et ainsi $2(u(x)|x) = 0$ soit finalement $(u(x)|x) = 0$.

Réciproquement, si on suppose que $\forall x \in E, (u(x)|x) = 0$ alors soit $(x, y) \in E^2$, on a donc par l'hypothèse

$$(u(x+y)|x+y) = 0$$

et ainsi en développant par bilinéarité du produit scalaire

$$(u(x)|x) + (u(x)|y) + (u(y)|x) + (u(y)|y) = 0$$

et donc en simplifiant, il reste $(u(x)|y) + (u(y)|x) = 0$ soit $(u(x)|y) = -(x|u(y))$. Donc u est antisymétrique.

5. Soit $u \in \mathcal{A}(E)$.

- (a) Soit $y \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$, on a $u(y) = 0$ et $y = u(x)$. On écrit alors

$$(y|y) = (y|u(x)) = -(u(y)|x) = 0$$

et ainsi $\|y\|^2 = 0$ d'où $y = 0$. On a donc $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) \subset \{0\}$ et donc l'égalité.

- (b) On a donc déjà $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ qui sont en somme directe. On sait de plus que par le théorème du range, que $\dim E = \dim \text{Ker}(u) + \dim \text{Im}(u)$. Donc $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont supplémentaires dans E .

- (c) Soit $x \in \text{Ker}(u)$ et $y \in \text{Im}(u)$, on écrit $y = u(z)$ avec $z \in E$. On a

$$(x|y) = (x|u(z)) = -(u(x)|z) = -(0|z) = 0$$

Donc $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont orthogonaux. Nous avons donc finalement $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.

- (d) On suppose que $u \neq 0$. Par la stabilité de $\text{Im}(u)$ par u , on considère l'endomorphisme v induit par u sur $\text{Im}(u)$.

Par restriction v est antisymétrique (qui peut le plus, peut le moins).

On vérifie que v est injectif (intuitivement, on a nettoyé le noyau de u) : soit $x \in \text{Im}(u)$, si $v(x) = 0$ alors $u(x) = 0$ et ainsi $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$ et donc $x = 0$.

Donc v est injective, et ainsi comme endomorphisme en dimension finie, il est bijectif. Donc v est antisymétrique et est un automorphisme.

Ainsi, d'après la question 3, nous avons $\dim \text{Im}(u)$ pair, et donc $\text{rg}(u)$ est pair. Si $u = 0$, et bien $\text{rg}(u) = 0$, qui est aussi pair.

6. Soit A antisymétrique réelle de taille n . On considère une valeur propre complexe λ de A , et X un vecteur propre complexe associé.

(a) On a

$$\overline{X}^T X = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} x_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \in \mathbb{R}_+$$

avec de plus $X \neq 0$ et ainsi il existe i_0 de sorte que $x_{i_0} \neq 0$ et ainsi $|x_{i_0}|^2 > 0$. Donc $\overline{X}^T X \in \mathbb{R}_+^*$.

(b) On a

$$\overline{X}^T AX = \overline{X}^T (\lambda X) = \lambda \overline{X}^T X$$

et aussi

$$\overline{X}^T AX = -\overline{X}^T A^T X = -(A\overline{X})^T X = -\overline{AX}^T X = -\overline{\lambda X}^T X = -\overline{\lambda} \overline{X}^T X$$

Donc $\overline{X}^T AX = \lambda \overline{X}^T X = -\overline{\lambda} \overline{X}^T X$.

(c) Ainsi comme $\overline{X}^T X > 0$, nous avons $\lambda = -\overline{\lambda}$. On en déduit que $\lambda \in i\mathbb{R}$.

(d) On suppose que n impair, on a vu que $\det(A) = 0$, et donc 0 est valeur propre de A .

Si n est pair, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique, de déterminant 1, non nul.

Donc 0 n'est pas valeur propre.

Pour $A = 0$, la matrice est antisymétrique de déterminant 0 et 0 est valeur propre.

Lorsque n est pair, on ne peut rien dire en général sur $\det(A)$.

7. Soit u antisymétrique. On pose $s = u^2 = u \circ u$.

(a) L'application s est linéaire par composée, et pour $(x, y) \in E^2$, nous avons

$$(s(x)|y) = (u \circ u(x)|y) = -(u(x)|u(y)) = - - (x|u \circ u(y)) = (x|s(y))$$

et ainsi s est un endomorphisme symétrique.

(b) Soit λ une valeur propre de s , et x un vecteur propre associé (non nul). On a alors

$$(s(x)|x) = (\lambda x|x) = \lambda \|x\|^2$$

et aussi par antisymétrie de x

$$(s(x)|x) = (u(u(x)|x) = -(u(x)|u(x)) = - \|u(x)\|^2$$

Comme $\|x\| \neq 0$, en simplifiant $\lambda = -\frac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2}$ et on en déduit que $\lambda \leq 0$.

(c) On suppose ici $\det(u) \neq 0$, c'est à dire u bijectif. On pose $F = \text{Vect}(x, u(x))$. On a $u(x) \in F$ et $u(u(x)) = s(x) = \lambda x \in F$. Ainsi F est stable par u .

D'autre part, si $(x, u(x))$ n'est pas libre, on aurait $u(x)$ proportionnel à x , $u(x) = \alpha x$ avec α réel, et alors $\alpha \in i\mathbb{R}$, soit $\alpha = 0$. On aurait donc 0 valeur propre de u , et donc $\det(u) = 0$, ce qui est exclu ici. Donc F est un plan stable par u .

On remarque déjà que dans la base $(x, u(x))$, puisque $u(x) = 1 \cdot u(x)$ et $u(u(x)) = u^2(x) = s(x) = \lambda x$ avec $\lambda \leq 0$, la matrice de l'endomorphisme induit est

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On normalise : on pose $e_1 = \frac{x}{\|x\|}$ et $e_2 = \frac{u(x)}{\|u(x)\|}$, alors

$$u(e_1) = \frac{1}{\|x\|} u(x) = \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} e_2 = b e_2$$

et

$$u(e_2) = \frac{1}{\|u(x)\|} u^2(x) = \frac{1}{\|u(x)\|} s(x) = \frac{\lambda}{\|u(x)\|} x = \frac{\lambda \|x\|}{\|u(x)\|} e_1 = -\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} e_1 = -be_1$$

Ainsi la matrice de l'endomorphisme induit de u sur F est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

avec $b > 0$.

- (d) On procède par récurrence sur la dimension de l'espace n , $n \geq 1$, en exploitant 7c. et le fait que F stable par u , et que donc $F^\perp$ aussi, et que la restriction de u à F aura les mêmes propriétés que u .

En choisissant des bases orthonormées de chaque plan, et en les concaténant, nous obtenons une base orthonormée dans laquelle la matrice de u sera de la forme

$$\begin{pmatrix} B_1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \\ (0) & & B_k \end{pmatrix}$$

avec $B_i = \begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix}$ où $b_i > 0$. On en déduit que $\dim E$ est forcément paire.

Si $\det(u) = 0$, nous devons en plus tenir compte du noyau stable, donc son supplémentaire orthogonal aussi, et l'endomorphisme induit sur l'orthogonal du noyau sera bijectif, et encore antisymétrique. Nous pouvons réduire la matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} (0) & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & B_1 & \ddots & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & \cdots & (0) & B_k \end{pmatrix}$$