

Devoir en temps libre °1

Ce problème a pour objet l'étude de la convergence des suites réelles ou complexes au sens de Cesàro. L'objet de la partie est l'étude de cas particuliers. Dans la partie B, on démontre le théorème de Cesàro. Dans la partie C est fait l'étude d'un autre cas particulier plus difficile. La partie D est un exemple d'application de la convergence au sens de Cesàro. Dans la partie E, on étudie le cas particulier d'une suite complexe.

Les programmes en Python sont indépendants de l'étude mathématique et obligatoires. Ils devront être testés et fonctionnels.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe que l'on notera aussi plus simplement (a_n) . On pose

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

et

$$A_n = \frac{a_0 + \cdots + a_n}{n+1} = \frac{S_n}{n+1}$$

(A_n) est appelée suite de Cesàro associée à la suite (a_n) .

On dit que la suite (a_n) converge au sens de Cesàro si la suite (A_n) est convergente. Dans ce cas, la limite de (A_n) est appelé la limite de Cesàro de la suite (a_n) . On définit de même pour une suite réelle les notions de divergence au sens de Cesàro vers $-\infty$ ou $+\infty$. On parle aussi de convergence (ou divergence) en moyenne.

On se propose de démontrer le théorème suivant : si (a_n) converge vers ℓ (respectivement diverge vers $+\infty$ dans le cas d'une suite réelle) alors (a_n) converge au sens de Cesàro vers ℓ (respectivement diverge au sens de Cesàro vers $+\infty$).

On s'intéressera aussi à la réciproque, c'est à dire étudier si la convergence (respectivement divergence vers $+\infty$) au sens de Cesàro implique la convergence usuelle (respectivement divergence vers $+\infty$).

Rappel important : si le montant de votre compte en banque est croissant, et majoré par la coquette somme de 1.000.000.000 €, peut-on en déduire que ce montant converge vers 1.000.000.000 € ?

Partie A : cas particuliers

- (*) On suppose que $(a_n) = (\lambda)$ où λ est un complexe. Que peut-on dire de la suite (A_n) ?
- (*) On suppose que $(a_n) = (n)$. Calculer S_n et A_n pour tout entier n . Que peut-on dire de la suite (A_n) ?
- (*) Mêmes questions avec $(a_n) = (n^2)$.
- (**) On suppose que $(a_n) = ((-1)^n)$. Calculer S_n et A_n . Conclusion ?
- On suppose, dans cette question uniquement, que la suite (a_n) est réelle et croissante.

(a) (*) Montrer que ; $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \leq a_n$.

(b) (**) Montrer que la suite (A_n) est croissante.

(c) On suppose de plus que (a_n) converge vers ℓ

- (*) Montrer que (A_n) est convergente. Que dire de la limite de (A_n) ?
- (**) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_{2n+1} \geq \frac{1}{2}A_n + \frac{1}{2}a_{n+1}$$

iii. (*) En déduire que (A_n) converge vers ℓ .

(d) Réciproquement, on suppose que (A_n) converge vers ℓ .

- i. (***) Montrer par l'absurde que la suite (a_n) est majorée par ℓ . On montrera que si (a_n) n'est pas majorée par ℓ , il existe un rang N pour lequel $a_N > \ell$ et à partir duquel

$$A_n \geq \frac{n - N + 1}{n + 1} a_N + \frac{a_0 + \dots + a_{N-1}}{n + 1}$$

- ii. (**) En déduire que (a_n) converge vers ℓ .
 (e) (*) Énoncer le résultat que nous venons de prouver.

Partie B : le théorème de Cesàro

1. On suppose que (a_n) converge vers 0.
 (a) Rappeler la définition élémentaire de « (a_n) converge vers 0 ».
 (b) (*) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On considère un rang $N_0 \geq 1$ à partir duquel on a $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Montrer que si $n \geq N_0$, on a

$$|A_n| \leq \frac{|a_0 + \dots + a_{N_0-1}|}{n + 1} + \frac{n - N_0 + 1}{n + 1} \frac{\varepsilon}{2}$$

- (c) (***) En déduire qu'il existe un rang N_1 à partir duquel $|A_n| \leq \varepsilon$ et conclure.
 2. On suppose que (a_n) converge vers ℓ . On pose $(b_n) = (a_n - \ell)$.
 (a) (*) Montrer que $(B_n) = (A_n - \ell)$ avec (B_n) la suite de Cesàro associée à la suite (b_n) .
 (b) (*) En déduire que (A_n) converge vers ℓ .

On démontre de manière analogue que si (a_n) est une suite réelle qui diverge vers $+\infty$, alors la suite (A_n) diverge aussi vers $+\infty$ et que lorsque la suite (a_n) est croissante, la réciproque est vraie aussi.

La suite de Cesàro (A_n) associée à la suite (a_n) est en fait la suite des moyennes des $n + 1$ premiers termes. On peut généraliser le théorème de Cesàro à toute sorte de moyennes pondérées différemment.

Partie C : autre exemple avec simulation Python

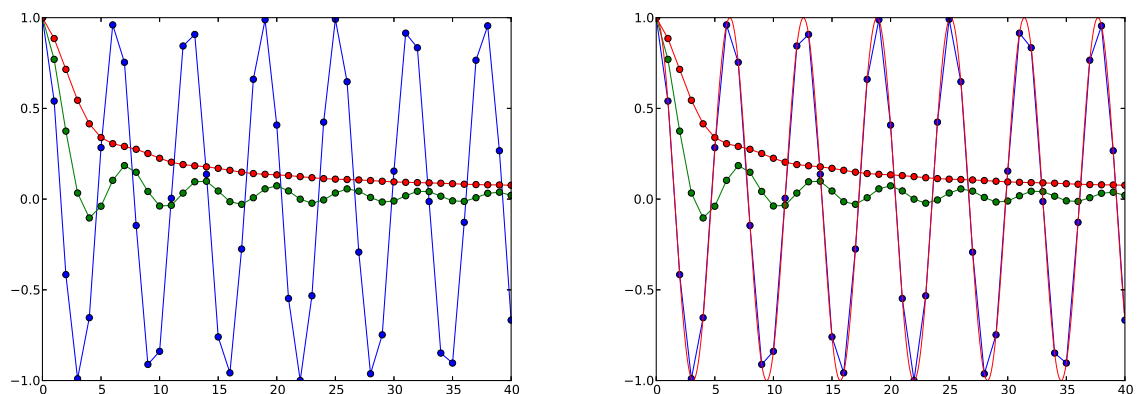
On considère ici la suite (a_n) définie par $(a_n) = (\cos n)$, qui est bien sûr une suite bornée.

1. (***) On souhaite visualiser le comportement des suites (a_n) et (A_n) . En plus, on souhaite itérer le procédé de Cesàro et visualiser aussi le comportement de (Λ_n) la suite de Cesàro associée à (A_n) .

Écrire une fonction Python `courbe` de paramètre n qui permet d'afficher sur un même graphique les termes d'ordre de 0 à n des suites (a_n) , (A_n) et (Λ_n) .

On procédera par étape, en commençant par la représentation de (a_n) seulement, puis en modifiant la fonction pour obtenir en plus la représentation de (A_n) , puis celle de (Λ_n) . On tâchera d'optimiser la fonction en évitant tout calcul redondant.

Appliqué à la suite $(a_n) = (\cos n)$, on obtiendra



Sur le second graphique, on a ajouté la courbe représentative de la fonction cosinus.

2. (*) Que remarque-t-on ? Quel est l'effet de la transformation de Cesàro ?

3. Divergence de $(\cos n)$. On suppose par l'absurde que la suite $(\cos n)$ est convergente.

(a) (**) En utilisant par exemple les formules

$$\cos(n) + \cos(n+2) = 2\cos(n+1)\cos 1 \quad \cos^2 n = \frac{1 + \cos(2n)}{2}$$

aboutir à une contradiction (indication : suites extraites).

4. (**) Réduire $S_n = \cos 0 + \cos 1 + \dots + \cos n$. On utilisera $1 + e^i + \dots + e^{in}$; la forme de l'expression simplifiée obtenue devra répondre à l'objectif de la question suivante.

5. (*) En déduire que (S_n) est bornée et conclure.

Partie D : application aux séries

On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$a_{n+1} = \sin(a_n)$$

1. (*) Montrer que la suite (a_n) est bien définie, positive.

2. (*) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$, $\sin x \leq x$ et représenter graphiquement cette inégalité.

3. (*) Représenter sur le graphique précédent la suite (a_n) . On adaptera au besoin de domaine.

4. (*) Écrire une fonction Python de paramètre n qui permet d'obtenir le graphique ci-dessus.

5. (*) Montrer que la suite (a_n) est décroissante. Que peut-on en déduire ?

6. (**) Montrer que la suite (a_n) converge vers 0.

7. On souhaite étudier la série $\sum a_n$. Pour cela on cherche un équivalent usuel de (a_n) .

(a) (**) En partant d'un développement limité de $\sin x$ en 0 à un certain ordre à déterminer (à l'avance?), déterminer un réel a non nul de sorte que

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = a + o_0(1)$$

(b) (*) En déduire que

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$$

(c) (**) En utilisant le théorème de Cesàro, montrer que

$$a_n \sim \sqrt{\frac{1}{na}}$$

et en déduire la nature de la série $\sum a_n$.

(d) (**) Écrire une fonction Python `recherche_rang` de paramètre un réel h positif qui détermine le plus petit entier n de sorte que

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n > h$$

On ne s'occupera pas des erreurs d'approximations.

Déterminer numériquement le plus petit entier n tel que $\sum_{k=0}^n a_k > 2015$.

8. (**) Déterminer un équivalent simple de $a_n - a_{n+1}$.

9. (***) Déterminer un équivalent simple de

$$a_n - \sqrt{\frac{1}{na}}$$

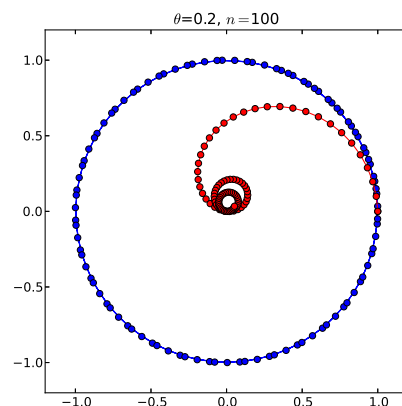
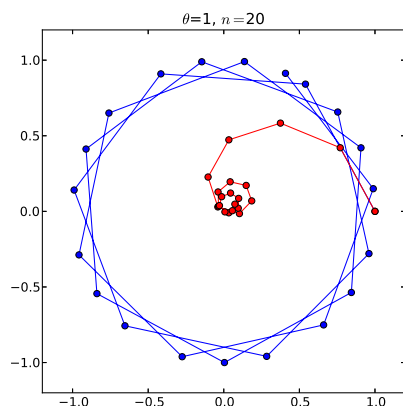
Partie E : exemple d'une suite complexe : simulation

On considère la suite (a_n) définie par $(a_n) = (e^{in\theta})$ où θ désigne un réel.

1. (**) Montrer que (a_n) est convergente si et seulement si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

2. (*) On suppose $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que (A_n) converge vers 0. (Reprendre la méthode de la partie B.)

3. (**) Écrire une fonction Python `courbe_complexe` de paramètres n et θ qui représente les suites complexes (a_n) et (A_n) . On obtiendra par exemple



4. (***) Écrire une fonction complexe `premier_rang` de paramètre θ, e, N qui détermine le premier rang n_0 à partir duquel les N termes successifs de la suite (A_n)

$$A_{n_0}, A_{n_0+1}, \dots, A_{n_0+N-1}$$

sont proches de la limite 0 à e près.

Indications : utiliser une variable dite « drapeau » ayant la valeur booléenne `False` tant que l'on a pas trouvé N termes successifs proche de 0 à e près, et une variable compteur `c` contenant le nombre courant de termes successifs proche de 0 à e près.

Fin



Fonctionnalités Python utiles pour ce devoir

Commandes	fonctionnalités
<code>import numpy as np</code>	importation numpy
<code>import matplotlib.pyplot as plt</code>	importation matplotlib.pyplot
<code>c.real</code>	partie réelle de la variable <code>c</code>
<code>c.imag</code>	partie imaginaire de <code>c</code>
<code>np.cos(x)</code>	fonction cosinus de numpy
<code>np.exp(n*1j*theta)</code>	exponentielle de $in\theta$
<code>liste = []</code>	initialisation d'une liste vide
<code>liste.append(e)</code>	ajout de l'objet <code>e</code> en fin de la liste
<code>np.linspace(a,b,n)</code>	création d'une liste subdivision de $[a, b]$ en n éléments
<code>plt.plot(x,y,'o')</code>	tracé des points d'abscisses de liste <code>x</code> et d'ordonnées de liste <code>y</code>
<code>plt.plot(x,y,'-o')</code>	tracé des points, et reliés
<code>plt.axis('scaled')</code>	axes de même échelle
<code>plt.show()</code>	affichage des courbes