Devoir surveillé n°1
2 heures

Exercice 1

On considère pour tout entier n non nul l'équation

$$f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4 = 0 \qquad (E_n)$$

sur $[0, +\infty[$.

1. (*) Montrer que (E_n) admet une unique solution que l'on note x_n. On étudiera les variations de la fonction f_n que l'on représentera. On a ainsi
$$\forall n \geqslant 1 \, , \, x_n^n + 9x_n^2 = 4.$$
2. (*) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \, , \, x_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[.$$
3. (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $f_{n+1}(x_n) < 0$ en en déduire les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. (*) Montrer alors que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
5. (**) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{2}{3}$.
6. (**) Montrer que
$$\frac{2}{3} - x_n \sim \frac{1}{12} x_n^n$$
puis que (****)
$$\frac{2}{3} - x_n \sim \frac{1}{12} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Exercice 2

On considère l'application u de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui même définie par

$$u(M) = M + M^T$$

1. (*) Montrer que u défini un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. (*) Quel est le noyau de u ? L'endomorphisme u est-il injectif ?
3. (*) Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ où $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2.
4. (*) En déduire que $\mathrm{Im}(u) = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Que vaut le rang de u ?
5. (**) Déterminer la matrice de u relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
6. (*) Exprimer $u^2 = u \circ u$ à l'aide de u et en déduire que $\frac{1}{2}u$ est un projecteur dont on précisera les éléments.

Exercice 3

Soit a et b deux nombres complexes. On pose

$$D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a+b & ab & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ (0) & & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n,n}$$

avec

$$D_1(a,b) = a+b \qquad D_2(a,b) = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix}$$

1. Soit $n \geqslant 3$, montrer que
$$D_n(a,b) = (a+b)D_{n-1}(a,b) - abD_{n-2}(a,b)$$
2. Déterminer $D_0(a,b)$ de sorte que
$$D_2(a,b) = (a+b)D_1(a,b) - abD_0(a,b)$$
3. En déduire que
$$D_n(a,b) = \begin{cases} \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} & \text{si } a \neq b \\ (n+1)a^n & \text{si } a = b \end{cases}$$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_n la variable aléatoire dont la valeur est égale au chiffre obtenu en lançant un dé parfaitement équilibré à n faces numérotées de 1 à n.

1. (*) Quelle est la loi de la variable aléatoire X_n ?
2. (*) Que vaut l'espérance de X_n ?
3. (**) Déterminer un équivalent simple de l'espérance de $Y_n = 1/X_n$. On pourra utiliser un équivalent classique.

Exercice 5

En utilisant une intégration par parties adaptée, montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\mathrm{d}x$$

et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(x)\mathrm{d}x$.

Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 6

On lance des fusées vers Saturne. À chaque lancer, la probabilité de réussite est de 0,7.

1. On effectue dix lancers successifs, quelle est la probabilité d'obtenir k lancers réussis ?
2. Quel est le nombre moyen de lancers réussis ?
3. Combien faudrait-il de lancers pour avoir 98% de chances qu'au moins un lancer ait réussi ?

* *

*

Exercice 1

1. On pose $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4 = 0$ sur $[0, +\infty[$. La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme fonction polynomiale, et on a f_n strictement croissante sur $[0, +\infty[$ par opérations, ou par sa dérivée

$$f_n'(x) = nx^{n-1} + 18x$$

strictement positive, sauf en 0 (si $n \geqslant 2$). On en déduit les variations de la fonction f_n sur $[0, +\infty[$:

x	0	x_n	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$		$+$
f_n	-4 $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

Ainsi f continue, établit une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[-4, +\infty[$ et donc admet un unique zéro que l'on note x_n avec $x \in]0, +\infty[$.

On remarquera que si $n = 1$, $f_1(x) = x + 9x^2 - 4 = 9x^2 + x - 4$, de discriminant $\Delta = 1 + 36 = 37$, et ainsi $x_1 = \frac{\sqrt{37}-1}{2}$. Pour $n = 2$, $f_2(x) = 10x^2 - 4$ et $x_2 = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

2. On a

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 4 - 4 = \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$$

et ainsi par les variations de f_n, on a forcément $x_n < \frac{1}{2}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[.$$

3. On a si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + 9x_n^2 - 4x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n(x_n - 1) < 0$$

D'après les variations de la fonction f_{n+1}, on a donc forcément $x_n < x_{n+1}$. Ainsi la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante.

4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, majorée par $\frac{2}{3}$ et donc elle converge vers une limite L avec $L \in]0, 2/3]$.

5. On sait que pour tout entier n non nul,

$$x_n^n + 9x_n^2 - 4 = 0 \qquad (E_n')$$

Or $|x_n^n| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et ainsi (x_n^n) converge vers 0 et donc en passant à la limite dans (E_n'),

$$9L^2 - 4 = 0$$

et ainsi puisque $L > 0$, on a $L = \frac{2}{3}$. Ainsi la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{2}{3}$.

6. On écrit (E_n') sous la forme

$$4 - 9x_n^2 = (2-3x_n)(2+3x_n) = x_n^n$$

et ainsi

$$2 - 3x_n = \frac{1}{2+3x_n} x_n^n$$

soit encore

$$\frac{2}{3} - x_n = \frac{1}{3(2+3x_n)} x_n^n$$

Or $(2+3x_n)$ converge vers 4 et donc

$$\boxed{\frac{2}{3} - x_n \sim \frac{1}{12} x_n^n}$$

Ensuite on écrit que

$$x_n^n = \mathrm{e}^{n \ln(x_n)}$$

et sachant que

$$x_n = \frac{2}{3} + x_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} - x_n\right)\right)$$

et ainsi

$$\ln(x_n) = \ln\frac{2}{3} + \ln\left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} - x_n\right)\right)$$

d'où

$$n\ln(x_n) = n\ln\frac{2}{3} + n\ln\left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} - x_n\right)\right)$$

Or on a

$$\ln\left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} - x_n\right)\right) \sim -\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} - x_n\right) \sim -\frac{1}{8} x_n^n$$

et donc

$$n\ln\left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} - x_n\right)\right) \sim -\frac{n}{8} x_n^n$$

Or

$$0 \leqslant n x_n^n \leqslant n\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

et par comparaison puissance-exponentielle

$$n^1 \left(\frac{2}{3}\right)^n \longrightarrow 0$$

et ainsi $n x_n^n \longrightarrow 0$. Finalement on a

$$\boxed{\frac{2}{3} - x_n \sim \frac{1}{12} x_n^n \sim \frac{1}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

Exercice 2

1. L'application u est bien définie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} u(\lambda M + \mu N) &= \lambda M + \mu N + (\lambda M + \mu N)^T \\ &= \lambda M + \mu N + \lambda M^T + \mu N^T \\ &= \lambda(M + M^T) + \mu(N + N^T) = \lambda u(M) + \mu u(N) \end{aligned}$$

et ainsi u est linéaire. Ainsi u défini un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On a

$$M \in \mathrm{Ker}(u) \iff u(M) = 0 \iff M + M^T = 0 \iff M^T = -M$$

et ainsi $\mathrm{Ker}(u) = \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ espace vectoriel des matrices antisymétrique, de dimension 1. Comme $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0\}$, l'endomorphisme u n'est donc pas injectif.

3. Soit $A \in \mathrm{Im}(u)$, il existe M matrice carrée d'ordre 2 telle que $A = u(M) = M + M^T$ et ainsi $A^T = (M + M^T)^T = M^T + M = A$ et donc $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
On a donc bien l'inclusion $\mathrm{Im}(u) \subset \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

4. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4 = \mathrm{rg}(u) + \dim \mathrm{Ker}(u)$$

et ainsi $\mathrm{rg}(u) = \dim \mathrm{Im}(u) = 4 - 1 = 3$. Or $\dim \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) = 3$ et comme d'après la question précédente, $\mathrm{Im}(u) \subset \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ on en déduit que forcément par la dimension $\mathrm{Im}(u) = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

5. La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$, et on a

$$\begin{cases} u(E_{1,1}) = 2E_{1,1} = 2.E_{1,1} + 0.E_{1,2} + 0.E_{2,1} + 0.E_{2,2} \\ u(E_{1,2}) = E_{1,2} + E_{2,1} = 0.E_{1,1} + 1.E_{1,2} + 1.E_{2,1} + 0.E_{2,2} \\ u(E_{2,1}) = E_{2,1} + E_{1,2} = 0.E_{1,1} + 1.E_{1,2} + 1.E_{2,1} + 0.E_{2,2} \\ u(E_{2,2}) = 2E_{2,2} = 0.E_{1,1} + 0.E_{1,2} + 0.E_{2,1} + 2.E_{2,2} \end{cases}$$

et ainsi la matrice de u dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6. On a si M matrice de taille 2,

$$u^2(M) = u(u(M)) = u(M + M^T) = M + M^T + (M + M^T)^T = 2(M + M^T) = 2u(M)$$

et ainsi $u^2 = 2u$, soit encore en divisant par 4, par linéarité, $\frac{u}{2} \circ \frac{u}{2} = \frac{u}{4}$. Ainsi $\frac{u}{2} = p$ est un projecteur, projection sur $\mathrm{Im}\left(\frac{u}{2}\right) = \mathrm{Im}(u) = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\left(\frac{u}{2}\right) = \mathrm{Ker}(u) = \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3

1. En développant selon la première ligne

$$D_n(a,b) = (a+b)D_{n-1}(a,b) - ab \begin{vmatrix} 1 & ab & & (0) \\ 0 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ (0) & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

   et ainsi

$$D_n(a,b) = (a+b)D_{n-1}(a,b) - abD_{n-2}(a,b)$$

2. On a $D_1(a,b) = a+b$ et $D_2(a,b) = (a+b)^2 - ab = a^2 + b^2 + ab$; on pose alors $D_0(a,b) = 1$ de sorte que

$$(a+b)D_1(a,b) - abD_0(a,b) = (a+b)^2 - ab = D_2(a,b).$$

3. Ainsi la suite (D_n) est une suite récurrente d'ordre 2 linéaire à coefficients constants, d'équation caractéristique $x^2 - (a+b)x + ab$, de racines a et b.

   Dans le cas où $a \neq b$, nous avons donc deux racines distinctes et il existe des constantes α et β de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ D_n(a,b) = \alpha a^n + \beta b^n$$

   On a $D_0 = 1 = \alpha + \beta$ et

$$D_1 = \alpha a + \beta b = \alpha a + (1-\alpha)b = \alpha(a-b) + b = a + b$$

   et ainsi

$$\alpha = \frac{a}{a-b}$$

   puis

$$\beta = 1 - \alpha = \frac{-b}{a-b}$$

   Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ D_n(a,b) = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

   Dans le cas où $a = b$, nous avons une racine double a, et il existe des constantes α et β de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ D_n(a,b) = \alpha a^n + \beta n b^n$$

   On a $D_0 = 1 = \alpha$ et

$$D_1 = \alpha a + \beta a = a + \beta a = 2a$$

   et ainsi $\beta = 1$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ D_n(a,b) = (n+1)a^n$$

   Finalement, nous avons

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ D_n(a,b) = \begin{cases} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} & \text{si } a \neq b \\ (n+1)a^n & \text{si } a = b \end{cases}}$$

Exercice 4

1. La variable aléatoire X_n suit la loi uniforme $\mathcal{U}(1,\ldots,n\}$ puisqu'elle prend les valeurs $1,\ldots,n$ avec la probabilité $\frac{1}{n}$.
2. L'espérance de X_n est donc $\frac{n+1}{2}$.
3. Par la formule de transfert appliquée à $Y_n = f(X_n)$ avec la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, nous avons
$$E(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \frac{\ln(n)}{n}$$

Exercice 5

On effectue une intégration par parties avec

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \cos(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = \sin(x) \end{cases}$$

avec f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} x\cos(x)\mathrm{d}x &= \underbrace{[x\sin(x)]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} 1\sin(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 1\sin(x)\mathrm{d}x \\ &= [-\cos(x)]_{-\pi}^{\pi} = -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

ce qui était prévisible puisque la fonction $x \mapsto x\cos(x)$ est impaire sur le segment $[-\pi, \pi]$ centré en 0.

Exercice 6

On lance des fusées vers Saturne. À chaque lancer, la probabilité de réussite est de 0,7.

On modélise les n lancers vers Saturne par une succession de n épreuves de Bernoulli, indépendantes, de même paramètre $p = 0,7$, la probabilité de succès. On note X_n la variable aléatoire dont la valeur est égale au nombre de succés. On sait que X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

1. La probabilité d'obtenir k lancers réussis sur les 10 est donc
$$P(X_{10} = k) = \binom{10}{k} 0,7^k (1 - 0,7)^{10-k}$$
2. Le nombre moyen de lancers réussis vaut $E(X_n) = np$ et en particulier $E(X_{10}) = 7$.
3. La probabilité qu'au moins un lancer ait réussi est de
$$P(X_n \geqslant 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - 0,3^n$$
On a
$$1 - 0,3^n \geqslant \frac{98}{100} \iff 0,3^n \leqslant \frac{2}{100} = \frac{1}{50} \iff n\ln(0,3) \leqslant -\ln(50) \iff n \geqslant -\frac{\ln(50)}{\ln(0,3)} \approx 3,24$$
(attention aux signes et inégalités) et donc avec 4 lancers, on est sûr (quasi oxymore) à 98% d'obtenir un lancer réussi.