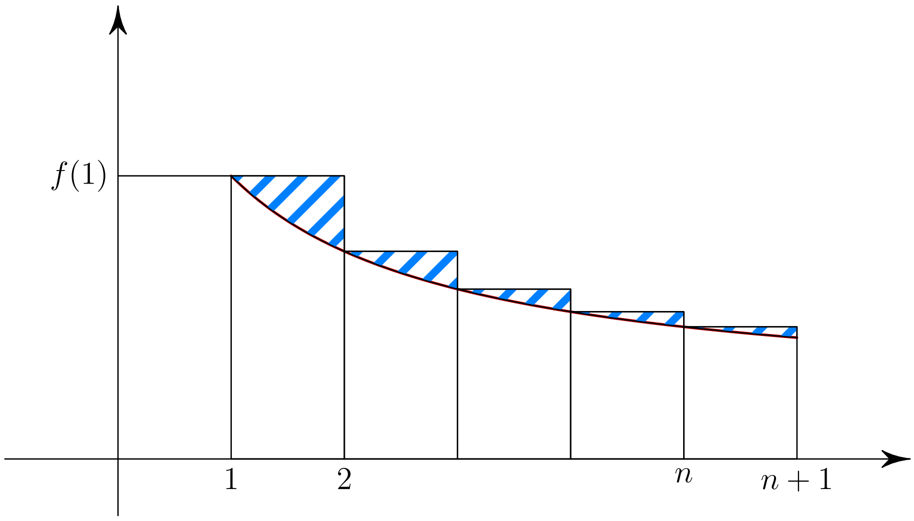
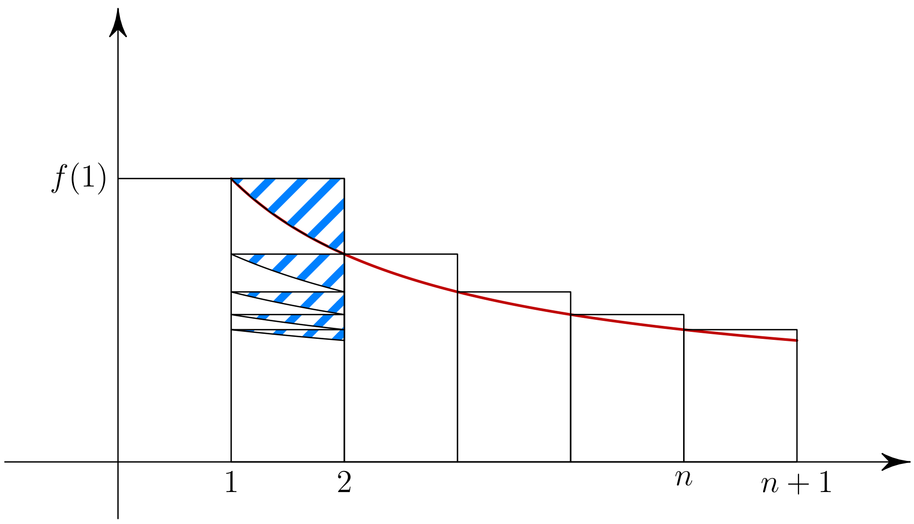
Devoir °1

Problème

Soit $f : [1, +\infty[$ une fonction continue, positive et décroissante, de limite nulle en $+\infty$.



On se propose de démontrer cette remarque géométrique : si, on accumule les erreurs commises en remplaçant les surfaces associées à la courbe par les surfaces associées aux rectangles situés au-dessus de la courbe, dans le premier rectangle entre 1 et 2 (par exemple), on constate que l'on obtient une suite croissante, majorée par la surface du premier rectangle soit $f(1)$, qui donc sera convergente vers une constante notée γ_f.



On pose

$$a_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$$

et

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

1. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$,
$$f(k+1) < \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x < f(k)$$
2. En déduire que pour tout entier k non nul, on a
$$0 < a_k < f(k) - f(k+1)$$
3. En déduire que
$$0 < A_n < f(1) - f(n+1) < f(1)$$
et que la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.
4. Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
5. Montrer que la suite (A_n) converge vers une limite que l'on notera γ_f.
6. Montrer que
$$A_{n-1} = f(1) + \cdots + f(n-1) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$
7. En déduire que
$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)\mathrm{d}x + \gamma_f + \mathrm{o}(1)$$
8. En déduire que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que si l'on note dans ce cas $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ cette limite, on a
$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x + \gamma_f$$
9. En déduire qu'il existe une constante[1] γ réelle telle que
$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$
Montrer que $1 - \ln 2 < \gamma$.
10. Étudier les variations de la fonction g définie par
$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$
sur $]0, +\infty[$.
11. Montrer qu'il existe une constante C réelle telle que
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln^2(n)}{2} + C + \mathrm{o}(1)$$
Quelle est la nature de la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n}$?

1. il s'agit de la constante γ d'Euler-Mascheroni

12. Montrer que la série numérique
$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$$
est convergente. Est-elle absolument convergente ? On note $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles associées à cette série numérique.

13. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que
$$T_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k\ln(k)}{k}=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k}$$
puis que
$$T_{2n}=-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k}$$
et en déduire que
$$T_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k)}{k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k}+\ln 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=S_n-S_{2n}+\ln(2)H_n$$

14. En déduire que
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}=\ln 2\left(\gamma-\frac{\ln(2)}{2}\right).$$

* *
*