Preuve de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

1. Démontrer que

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\,, \sin x < x < \tan x.$$

   et en déduire que

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\,, \operatorname{cotan}^2 x = \frac{1}{\tan^2 x} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$$

2. Montrer que si $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\sin((2n+1)x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \sin^{2k+1} x \cos^{2n-2k} x$$

   En déduire que si $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin^{2n+1} x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \operatorname{cotan}^{2(n-k)} x$$

   On pose alors P_n le polynome défini par

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{n-k}$$

4. Montrer que le polynôme P_n est scindé à racines simples, ces racines étant $x_1, \dots, x_n$ avec

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, , x_k = \operatorname{cotan}^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

5. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$$

   On utilisera le coefficient de X^{n-1} de P.
6. En utilisant le fait que

$$\forall x \notin \pi\mathbb{Z}\,, \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{cotan}^2 x$$

   montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} = \frac{2n(n+1)}{3}$$

7. Montrer alors que

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

* *
*