Quinzaine 1 du 18/09 au 29/09

Révision 1 : Révision suites numériques

Suite réelle. Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Suite définie de façon explicite, implicite, par récurrence.

Limite d'une suite réelle. Limite finie ou infinie. Unicité de la limite.
Suite convergente, divergente.
Toute suite convergente est bornée.
Opérations usuelles sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.
Passage à la limite dans les inégalités larges.
Si (u_n) converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
Utilisation d'encadrement.

Suite monotone. Théorème de la limite monotone.
Théorème des suites adjacentes. Approximations décimales d'un réel.

Suite extraite. Toute suite extraite d'une suite qui possède une limite (finie ou infinie) admet la même limite. Utilisation pour la divergence.
Cas des suites extraites des termes d'ordre pair et impair.

Suites complexes. Brève extension des définitions et résultats précédents. Limite et partie réelle et imaginaire.

Suites arithmétiques ; suites géométriques ; suites arithmético-géométriques : résolution par la méthode du point fixe (*) ou résolution par calcul des premiers termes (et éventuellement récurrence). Suites récurrentes linéaire d'ordre 2 linéaires. Résolution générale (formules admises) dans le cas réel et complexe et structure de l'ensemble des solutions. Équation caractéristique. Détermination selon les conditions initiales. Exemples.

Suites définies par u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Intervalle stable. Généralités. Cas où f est croissante. Cas où f décroissante. Les étudiants doivent savoir représenter une telle suite. Utilisation d'une majoration (géométrique) du type $|u_{n+1} - \ell| \leqslant k|u_n - \ell|$ lorsque $0 \leqslant k < 1$. Obtention directe ou par le théorème des accroissements finis. Exemple avec la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.
Exemple de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

Chapitre 1 : *Séries numériques*
Série à termes réels ou complexes ; sommes partielles ; convergence ou divergence ; somme et restes en cas de convergence. Linéarité de la somme. Exemple de la série télescopique $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ par la décomposition de $x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$ (*).
Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Divergence grossière.
Contre exemple de la série harmonique avec méthodologie particulière : $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$ et croissance de (S_n)(*).
Séries géométriques : sommes partielles, convergence, somme(*).

Une suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge. Série télescopique. Exemples de télescopage divers et variés :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1}\qquad \sum_{n\geqslant 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\qquad \sum\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}$$

Séries à termes positifs. Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite des sommes partielles qui est croissante est majorée ou encore si et seulement si l'une des suites extraites de la suite des sommes partielles converge.

Pour une fonction continue et monotone positive, encadrement des sommes partielles de la série $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles (intégrales) ; diverses situations (f définie sur $[0,+\infty[$ ou sur $[1,+\infty[$), divers encadrements. Application aux séries de Riemann. Détermination d'un équivalent du reste d'ordre n dans le cas de convergence. Détermination d'un équivalent de la somme partielle dans le cas de divergence. On a (*)

$$H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\sim\ln n$$

et aussi s $\alpha<1$

$$S_n = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\sim\frac{1}{1-\alpha}n^{1-\alpha}$$

et si $\alpha>1$ (*),

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}\sim\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Théorème de majoration pour les séries à termes positifs. Théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs.

Exemples de comparaison à une série de Riemann. Utilisation de $n^\alpha u_n\longrightarrow 0$ avec $\alpha>1$ ou par exemple $n^\alpha u_n\longrightarrow+\infty$ avec $\alpha\leqslant 1$. Exemples (*)

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n^2}$$

Comparaison géométrique : critère de d'Alembert. Exemples

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{2^n n!}{n!}\qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n n!}{n!}$$

Questions de cours :

— Les énoncés des définitions, des théorèmes.

— Les démonstrations marquées par (*).

— Les méthodes usuelles sur des exemples.