Quinzaine 2 du 02/10 au 13/10

Chapitre 1 : *Séries numériques*
Formule de Stirling : équivalent de n!. Preuve complète pour les méthodes, utilisation des intégrales de Wallis.

Comparaison géométrique : critère de d'Alembert. Exemples.

Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste, de la somme (ou critère de Leibniz).
Utilisation de la majoration du reste pour déterminer une valeur approchée de la somme.
Séries réelle ou complexe $\sum u_n$ absolument convergente. On parle aussi de sommabilité de la suite (u_n).
La convergence absolue implique la convergence et majoration de la somme en module ou valeur absolue. Somme d'une suite sommable.
Théorème de domination pour les séries à termes réels ou complexes : si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ avec (v_n) une série à termes positifs convergente, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.
Exemples d'utilisation des développements asymptotiques avec utilisation du « grand O » plutôt que du « petit o » usuel.

Produit de Cauchy $\sum w_n$ de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ avec

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k = \sum_{p+q=n} u_p v_q$$

Théorème fondamental (admis) : si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors le produit de Cauchy $\sum w_n$ aussi et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Exemples d'utilisation du produit de Cauchy de deux séries numériques.
Étude de $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)3^{-n}$ (*).

Chapitre 2 : *Suites et séries de fonctions*
Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions.
La convergence uniforme entraîne la convergence simple.
Introduction de la norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et utilisation.
Si (f_n) converge uniformément vers f sur I, pour toute suite (a_n) d'éléments de I, la suite $(f_n(a_n) - f(a_n))$ converge vers zéro. Application à la non convergence uniforme.
Continuité de la limite d'une suite de fonctions : si (f_n) converge uniformément vers f sur I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, alors f est continue sur I (*)(interversion limite-limite). Application à la non convergence uniforme.
Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I ou d'autres intervalles adaptés à la situation.

Interversion limite-intégrale sur un segment (*) : si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$$

Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions (interversion limite-dérivée) :
si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que la suite (f'_n) converge uniformément sur I vers h, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = h$.
Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I ou d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Les étudiants peuvent appliquer directement le théorème concluant au caractère $\mathcal{C}^k$ de la limite sous l'hypothèse de convergence simple des $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ sur tout segment de I ou d'autres intervalles adaptés à la situation.
Remarques sur le fait que la connaissance dans les cas pratiques de la limite simple f nous exempte de l'utilisation de ces théorèmes pour la continuité et dérivalibilité, mais que par contre, dans le cas des séries de fonctions, la fonction somme sera le plus souvent inconnue et que ces théorèmes dans leur version séries de fonctions seront indispensables pour l'étude des propriétés de la fonction somme.

Questions de cours :

- Les énoncés des définitions, des théorèmes.
- Les démonstrations marquées par (*).
- Les méthodes usuelles sur des exemples.