

Devoir surveillé n°1

2 heures

Exercice 1

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique s'il existe $T \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+T} = u_n.$$

On note F l'ensemble des suites réelles périodiques. On va montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel usuel E .

1. Que peut-on dire d'une suite constante du point de vue de la périodicité ?
2. Donner un exemple d'une suite non constante qui est 2 périodique.
3. Quel est votre choix pour l'espace E ?
4. Quels sont les points à vérifier pour justifier de la structure de sous-espace vectoriel ? On indiquera formellement avec des notations adaptées les points à vérifier.
5. Effectuer les vérifications des points précisés dans la question précédente.

Exercice 2

Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application f_A définie par

$$\begin{aligned} f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto AM - MA \end{aligned}$$

1. Justifier que f_A est bien définie.
2. Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Reconnaître f_{I_n} où I_n désigne la matrice identité.
4. Donner la définition formelle du noyau de f_A ainsi que sa structure et décrivez alors en d'autres termes $\text{Ker}(f_A)$ (par une phrase en français).
5. Montrer que toutes les puissances de A appartiennent au noyau de f_A .
6. En déduire que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall (a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}, \sum_{i=0}^p a_i A^i \in \text{Ker}(f_A)$$

7. Déterminer $\text{Ker}(f_{I_n})$.
8. On suppose que $n = 2$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer $\text{Ker}(f_A)$. On précisera une base et sa dimension. En réduire le rang de f_A .
Donner alors la dimension de l'image de f_A et déterminer $\text{Im}(f_A)$ en précisant une base.

Exercice 3

Soit $n \geq 1$, on rappelle que les racines n -ièmes de l'unité sont les n complexes

$$u_{n,k} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

et on note $\mathbb{U}_n$ leur ensemble.

1. Préciser et représenter $\mathbb{U}_1$, $\mathbb{U}_2$, $\mathbb{U}_3$ et $\mathbb{U}_4$.
2. Soit $p \in \mathbb{Z}$, on pose

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n-1} u_{n,k}^p$$

la somme donc des puissances p -ièmes des racines n -ièmes de l'unité.

- (a) Que vaut $S_{1,p}$?
- (b) Calculer $S_{2,1}$, $S_{3,1}$ et $S_{4,1}$.
- (c) Calculer $S_{2,2}$, $S_{3,3}$ et $S_{4,4}$.
- (d) Soit $n \geq 2$, vérifier que

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n-1} \left[e^{\frac{2ip\pi}{n}} \right]^k$$

Quelle type de somme reconnaît-on ?

- (e) Montrer que $e^{\frac{2ip\pi}{n}} = 1$ si et seulement si p est multiple de n .
- (f) En déduire que si $n \geq 2$, $p \in \mathbb{Z}$,

$$S_{n,p} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ non multiple de } n \\ n & \text{si } p \text{ multiple de } n \end{cases}$$

Exercice 4

On considère l'espace vectoriel E des fonctions continues sur $[-1, 1]$ à valeurs réelles et on pose si f, g sont deux éléments de E ,

$$(f|g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

1. Démontrer que $(\cdot|\cdot)$ définie un produit scalaire sur E .
2. En utilisant une intégration par parties adaptée, montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cos(x) dx = - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx$$

et en déduire la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos(x) dx$.

Ce résultat était-il en fait prévisible sans calculs ?

Comment interprète-t-on ce résultat en terme d'orthogonalité ?

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^m$ (avec n et m des entiers naturels) soient orthogonales.

Exercice 5

On lance des fusées vers Saturne. À chaque lancer, la probabilité de réussite est de 0,7.

1. On effectue dix lancers successifs, quelle est la probabilité d'obtenir k lancers réussis ?
2. Quel est le nombre moyen de lancers réussis ?
3. Combien faudrait-il de lancers pour avoir 98% de chances qu'au moins un lancer ait réussi ?

Exercice 1

1. Une suite constante est périodique pour n'importe quelle période $T \in \mathbb{N}^*$.
2. La suite $((-1)^n)$ est non constante et 2 périodique.
3. On choisit pour E l'espace vectoriel réel des suites réelles.
4. On vérifie que :
 - a) F non vide
 - b) $F \subset E$
 - c) F stable par combinaison linéaire de deux éléments.
5. On vérifie les points précisés dans la question précédente :
 - a) La suite nulle est périodique (n'importe quelle période).
 - b) Les suites périodiques sont avant tout des suites et donc $F \subset E$.
 - c) Soit (u_n) et (v_n) deux suites périodiques, λ et μ deux réels, on pose $(w_n) = \lambda(u_n) + \mu(v_n)$. On montre que (w_n) est aussi périodique.
Il existe T et T' des éléments de $\mathbb{N}^*$ de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+T} = u_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+T'} = v_n$$

Alors par récurrence sur k entier¹, on a facilement (vrai pour $k = 0, 1$ et l'hérédité ne pose pas de difficultés)

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+kT} = u_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+kT'} = v_n$$

Alors on obtient que TT' est une période commune aux deux suites et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+TT'} = u_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+TT'} = v_n$$

ce qui conduit à

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+TT'} = w_n$$

et donc (w_n) est périodique, donc dans F .

Ainsi F est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 2

1. Soit $M \in {}_m \text{athcal} M_n(\mathbb{R})$, $AM - MA \in (\mathbb{R})$ et ainsi f_A est bien définie.
2. la fonction f_A est définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. D'autre part, elle est linéaire puisque si M, N sont deux matrices de taille n , λ et μ deux réels, on a

$$\begin{aligned} f_A(\lambda M + \mu N) &= A(\lambda M + \mu N) - (\lambda M + \mu N)A \\ &= \lambda(AM - MA) + \mu(AN - NA) \\ &= \lambda f_A(M) + \mu f_A(N) \end{aligned}$$

Ainsi f_A est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit M matrice de taille n , on a $f_{I_n} = I_n M - M I_n = 0$ et ainsi f_{I_n} est l'application nulle.

1. on a besoin ici uniquement des positifs, mais cela est vrai aussi pour les entiers négatifs

4. On a par définition $\text{Ker}(f_A) = \{m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), f_A(M) = 0\}$ et ainsi

$$M \in \text{Ker}(f_A) \iff f_A(M) = 0 \iff AM - MA = 0 \iff AM = MA$$

ainsi le noyau de f_A est en fait l'espace vectoriel des matrices qui commutent avec A .

5. Soit $p \in \mathbb{N}$, on a

$$f_A(A^p) = A.A^p - A^p.A = A^{p+1} - A^{p+1} = 0$$

et ainsi A^p est dans le noyau de f_A (elle commute avec A).

6. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$, la combinaison linéaire

$$\sum_{i=0}^p a_i A^i$$

est une combinaison linéaire de matrices de $\text{Ker}(f_A)$, qui est un espace vectoriel, et ainsi elle est encore dans $\text{Ker}(f_A)$ ce qui répond à la question.

7. Déterminons $\text{Ker}(f_{I_n})$. par exemple, toutes les matrices commutent avec la matrice identité et ainsi $\text{Ker}(f_{I_n}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

8. On suppose que $n = 2$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour cet exemple, il va falloir se salir les mains, comme on dit. Soit

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\begin{aligned} M \in \text{Ker}(f_A) &\iff AM = MA \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix} \\ \iff z = 0 \text{ et } x = t & \\ \iff M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = xI_2 + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \end{aligned}$$

On en déduit que $\text{Ker}(f_A) = \text{Vect}(I_2, N)$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et comme I_2 et N ne sont pas proportionnelles, (I_2, N) est une base de $\text{Ker}(f_A)$ qui est donc de dimension 2.

D'après le théorème du rang, on a $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4 = \text{rg}(f_A) + \dim \text{Ker}(f_A)$ et ainsi f_A est de rang 2.

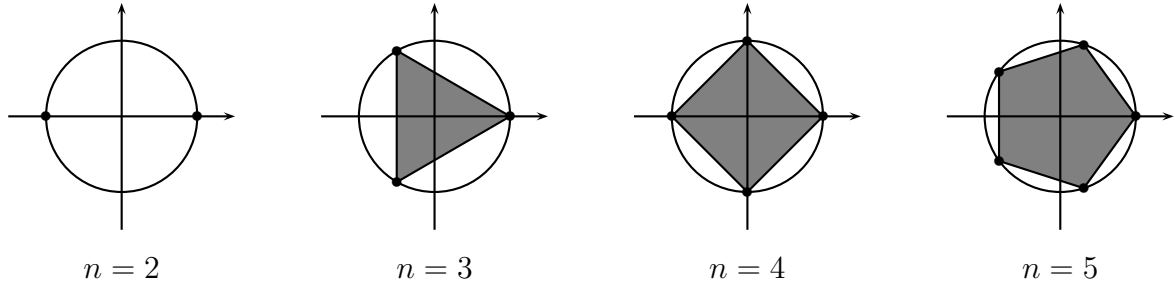
On sait par exemple que $\text{Im}(f_A)$ est engendré par l'image par f_A de la base canonique usuelle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ que l'on note habituellement $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$. On en choisit 2 qui donnent des images par f_A indépendantes (donc pas N qui est dans le noyau). On a

$$f_A \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f_A \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et comme ces deux images sont indépendantes, une base de $\text{Im}(f_A)$ est $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 3

1. Précisons et représentons $\mathbb{U}_1$, $\mathbb{U}_2$, $\mathbb{U}_3$ et $\mathbb{U}_4$ (et $\mathbb{U}_5$ pour le plaisir)



2. Soit $p \in \mathbb{Z}$, on pose

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n-1} u_{n,k}^p$$

la somme donc des puissances p -ièmes des racines n -ièmes de l'unité.

- (a) On a $S_{1,p} = 1^p = 1$.
- (b) On a $S_{2,1} = 1 + (-1) = 0$, $S_{3,1} = 1 + j + j^2 = 0$ et $S_{4,1} = 1 + i + (-1) + (-i) = 0$.
- (c) On a $S_{2,2} = 1^2 + (-1)^2 = 2$, $S_{3,3} = 1 + j^3 + j^6 = 3$ et $S_{4,4} = 1^4 + i^4 + (-1)^4 + (-i)^4 = 4$.
- (d) Soit $n \geq 2$, on a avec les règles sur les puissances

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n-1} \left[e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right]^p = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ipk\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left[e^{\frac{2ip\pi}{n}} \right]^k$$

On reconnaît une somme géométrique débutant à 1 de raison $e^{\frac{2ip\pi}{n}}$.

- (e) On a $e^{\frac{2ip\pi}{n}} = 1$ si et seulement si $\frac{2p\pi}{n} = 0$ modulo 2π si et seulement si il existe k tel que $\frac{2p\pi}{n} = 2\pi k$ si et seulement si il existe k tel que $p = kn$ si et seulement si p est multiple de n .
- (f) Ainsi si $n \geq 2$, $p \in \mathbb{Z}$, par la somme géométrique,

$$S_{n,p} = \begin{cases} \frac{1 - e^{\frac{2ip\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2ip\pi}{n}}} & \text{si } p \text{ non multiple de } n \\ n & \text{si } p \text{ multiple de } n \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ non multiple de } n \\ n & \text{si } p \text{ multiple de } n \end{cases}$$

et $S_{1,p} = 1$.

Exercice 4

- 1. On vérifie que $(\cdot|\cdot)$ définie un produit scalaire sur E .
 - Il s'agit d'une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, bien définie, car si f et g sont continues sur $[-1, 1]$, le produit fg aussi.
 - La symétrie est évidente.
 - On vérifie la linéarité selon la première position (cela découle de la linéarité de l'intégrale) : si $(f, g, h) \in E^3$ et $(\cdot)\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g|h) &= \int_{-1}^1 (\lambda f(x) + \mu g(x))h(x)dx \\ &= \lambda \int_{-1}^1 f(x)h(x)dx + \mu \int_{-1}^1 g(x)h(x)dx \\ &= \lambda(f|h) + \mu(g|h) \end{aligned}$$

- On a le caractère positif : si $f \in E$, on a $f^2 \geq 0$ et ainsi

$$(f|f) = \int_{-1}^1 f^2(x) dx \geq 0$$

- On a le caractère défini positif : si $f \in E$, si

$$(f|f) = \int_{-1}^1 f^2(x) dx = 0$$

Comme $f^2 \geq 0$ et f^2 continue sur $[-1, 1]$, on a $f^2 = 0$ sur $[-1, 1]$ (point par point), et ainsi $f = 0$ sur $[-1, 1]$ (point par point).

On a donc bien vérifié que l'on a un produit scalaire sur E .

2. On effectue une intégration par parties avec

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \cos(x) \end{cases} \quad \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = \sin(x) \end{cases}$$

avec f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(x) dx &= \underbrace{[x \sin(x)]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} 1 \sin(x) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \sin(x) dx \\ &= [-\cos(x)]_{-\pi}^{\pi} = -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

ce qui était prévisible puisque la fonction $x \mapsto x \cos(x)$ est impaire sur le segment $[-\pi, \pi]$ centré en 0.

Ainsi, vu dans $(E, (\cdots | \cdot))$, les fonctions identité et cosinus sont orthogonales.

3. Soient n et m des entiers naturels,

$$\int_{-1}^1 x^n x^m dx = \int_{-1}^1 x^{n+m} dx = \frac{1}{n+m+1} [x^{n+m+1}]_{-1}^1 = \frac{1}{n+m+1} (1 - (-1)^{n+m+1})$$

qui vaut zéro si et seulement si $n+m+1$ pair, c'est à dire si et seulement si n et m sont de parité différente, ce qui est la condition demandée pour l'orthogonalité.

Exercice 5

On lance des fusées vers Saturne. À chaque lancer, la probabilité de réussite est de 0,7.

On modélise les n lancers vers Saturne par une succession de n épreuves de Bernoulli, indépendantes, de même paramètre $p = 0,7$, la probabilité de succès. On note X_n la variable aléatoire dont la valeur est égale au nombre de succès. On sait que X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

1. La probabilité d'obtenir k lancers réussis sur les 10 est donc

$$P(X_{10} = k) = \binom{10}{k} 0,7^k (1 - 0,7)^{10-k}$$

2. Le nombre moyen de lancers réussis vaut $E(X_n) = np$ et en particulier $E(X_{10}) = 7$.
3. La probabilité qu'au moins un lancer ait réussi est de

$$P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - 0,3^n$$

On a

$$1 - 0,3^n \geq \frac{98}{100} \iff 0,3^n \leq \frac{2}{100} = \frac{1}{50} \iff n \ln(0,3) \leq -\ln(50) \iff n \geq -\frac{\ln(50)}{\ln(0,3)} \approx 3,24$$

(attention aux signes et inégalités) et donc avec 4 lancers, on est sûr (quasi oxymore) à 98% d'obtenir un lancer réussi.