

Kit de survie sur les développements limités

Dans la pratique, tous les développements limités s'effectuent au voisinage de 0, quitte à poser dans le cas d'une étude locale en a , $x = a + h$, h au voisinage de 0 de sorte que x au voisinage de a .

⚡ Dans le cas de $x = a + h$, on écrit les développements limités comme polynôme en h ou $x - a$, mais **JAMAIS** en x .

Dans le cas de l'étude au voisinage de l'infini en x , on pose $u = \frac{1}{x}$ pour se ramener en 0 (attention au signe selon $-\infty$ et $+\infty$), quitte à revenir en x pour conclure le calcul.

Opérations sur les développements limités. Pour résumer, les développements limités sont compatibles avec les additions, produits, composées, en prenant soin d'opérer avec des développements limités du **MÊME** ordre, et en tronquant au besoin tout ce qui dépasse cet ordre.

Les développements limités sont aussi compatibles avec le caractère de parité.

Il y a **unicité** de développement limité, d'où la possibilité d'identification des coefficients.

Les développements limités sont compatibles avec la pré-composition.

Un développement limité à l'ordre 0 équivaut à la continuité au point (ou au prolongement continu possible).

Un développement limité à l'ordre 1 équivaut au prolongement continu possible (si besoin) et à la dérivabilité, le développement limité donnant l'équation de la tangente au point (**Attention**, seulement valable à l'ordre 1).

On peut **intégrer** un développement limité, l'ordre étant augmenté de 1, **mais attention à la constante d'intégration** à ajuster. **On effectue donc en pratique les calculs à partir des développements limités usuels.**

⚡ Par contre, il **n'y a PAS de théorème de dérivation**. Au besoin, on peut intégrer le développement limité d'une dérivée, s'il existe.

Le développement de base, issu de la somme géométrique lorsque $q \neq 1$

$$1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} + \frac{-q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{1 - x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \text{ (fondamental)}$$

d'où $\frac{1}{1 + x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$ et par intégration

$$\ln(1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \text{ (indispensable)}$$

et aussi par pré-composition $\frac{1}{1 + x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1})$ d'où par intégration

$$\text{Arctan } x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

que l'on doit connaître à l'ordre 3 et savoir retrouver à l'ordre général.

Le développement de l'exponentielle s'obtient par intégrations successives :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

et par opérations ou parité

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \text{ et } \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

Les développements de sin et cos s'obtiennent aussi par intégrations successives (ou aussi avec Taylor-Young) :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

La formule de Taylor-Young pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a est **la formule théorique** qui permet de justifier facilement l'**existence** d'un développement limité sans faire de calculs. On l'utilise exceptionnellement pour déterminer un développement limité.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Appliqué à la fonction $f(x) = (1+x)^\alpha$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Deux cas particuliers sont à travailler (techniques qui reviennent très souvent)

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ soit } \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \underbrace{\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-5)(2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n)}}_{= \binom{2n-2}{n-1} \frac{1}{n 2^{2n-1}}} x^n + o(x^n)$$

que l'on peut obtenir en intégrant le suivant :

$$\alpha = -\frac{1}{2} \text{ soit } \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots + (-1)^n \underbrace{\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n)}}_{= \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}} x^n + o(x^n)$$

Applications des développements limités : équivalents

On n'oubliera pas que l'existence d'un nombre dérivé (équivalent à l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 au point) permet déjà d'obtenir beaucoup d'équivalent usuel

$$\text{Si } f \text{ est dérivable en } a \text{ alors } \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a) \text{ et si } f'(a) \neq 0, \text{ on a } f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a).$$

ce qui permet par exemple d'obtenir

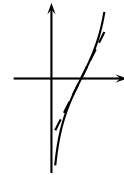
$$\sin x = \sin x - \sin 0 \underset{0}{\sim} x, \quad e^x - 1 = e^x - e^0 \underset{0}{\sim} x$$

Les développements limités d'ordre supérieurs permettent d'aller encore plus loin, d'obtenir des équivalents simples, et on obtient l'équivalent seulement à la fin du calcul, sous une forme simplifiée, avec un seul terme (sans **JAMAIS** le signe +, pour éviter les âneries (on ne peut pas sommer les équivalents))

$$\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \qquad \frac{\cos x - 1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2}$$

et un équivalent simple permet de déterminer le signe (application à l'étude locale d'une courbe, tangente et position par rapport à la tangente) ; par exemple

$$\ln(\tan(x)) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{=} 2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{3} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$



permet d'obtenir l'équation de la tangente en $\frac{\pi}{4}$: $y = 2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente donnée par le signe de $\frac{4}{3} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$.

Applications des développements limités : comportement asymptotique

Pour étudier une branche infinie indéterminée, on effectue le développement limité de $u \mapsto uf\left(\frac{1}{u}\right)$ en 0 (et éventuellement jongler avec le signe) : si

$$uf\left(\frac{1}{u}\right) \underset{u \rightarrow 0}{=} a + bu + o(u) \text{ alors } f(x) \underset{x \rightarrow \infty}{=} ax + b + o(1)$$

et ainsi la courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ (et réciproquement). Les positions relatives locales (au voisinage de l'infini considéré) s'obtiennent en déterminant un terme supplémentaire dans le développement.

Applications aux suites

⚡ On peut utiliser les développements limités pour effectuer des développements asymptotiques du terme d'une suite (a_n) . Mais attention, la quantité n ne tend pas vers 0 ; c'est $\frac{1}{n}$ ou $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ou d'autres qui tendent vers 0. On ne substitue donc jamais la variable x d'un développement limité en 0 par n , mais par $\frac{1}{n}$ ou tout autre quantité qui converge vers 0.

$$\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \quad \tan \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \quad \sinh \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \quad \text{Arctan} \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

ou encore si $\alpha > 0$,

$$\sin \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^\alpha} \quad 1 - \cos \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{2n^{2\alpha}}$$

Le développement $\sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ permet d'obtenir

$$\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{6n^3}$$

⚡ $u_n \sim u_{n+1}$ n'est pas automatique ; cela est faux si $u_n = e^n$, vrai si $u_n = \ln(n)$. On doit à chaque fois vérifier si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. C'est donc vrai par exemple lorsque (u_n) converge vers $\ell \neq 0$, mais ce n'est qu'une condition suffisante. Par exemple

$$\ln(n+1) = \ln n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n) + \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et ainsi

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{1}{n \ln(n)} + o\left(\frac{1}{n \ln(n)}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

De manière générale, pour obtenir le développement asymptotique d'une expression en n (qui tend vers $+\infty$), on commence par transformer l'expression pour faire apparaître les développements usuels, mais en $\frac{1}{n}$: par exemple, pour l'expression $a \ln n + b \ln(n+1) + c \ln(n+2)$, on écrit

$$\begin{aligned} a \ln n + b \ln(n+1) + c \ln(n+2) &= a \ln n + b \ln n \left(1 + \frac{1}{n}\right) + c \ln n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= (a+b+c) \ln n + b \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + c \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

mais par contre, $\ln n$ reste tel quel (terme de référence, comme les puissances de n). De même on écrit

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} - \sqrt{n \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \sqrt{n} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right]$$

et ici encore $\sqrt{n}$ reste tel quel.

Applications aux séries

Le paragraphe précédent s'applique au terme général a_n d'une série $\sum a_n$, ou à l'étude de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ pour les séries à termes strictement positifs.

⚡ Pour les séries à termes positifs, un équivalent c'est bien. **MAIS** pour les séries à termes quelconque, pour la convergence de la série, la recherche d'un équivalent n'est pas forcément pertinent. On effectue un développement asymptotique, et on travaille non pas en « petit o » mais en « grand o », dans un souci de concision et d'efficacité : en effet, nous avons un théorème de domination pour les séries.

Par exemple, si on étudie le comportement de la série $\sum \sin \frac{(-1)^n}{n}$, un équivalent est une idée très dangereuse (pourquoi?), par contre écrire

$$\sin \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

permet de conclure (avec des explications!) à la convergence de la série ; l'écriture

$$\sin \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

aussi, mais de manière bien moins efficace (parce qu'il faut donner encore plus d'explications)

1 Exercices

1. Soit x un réel quelconque. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Quelle est la limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$? de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$?

2. Calculer la limite en zéro des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= (\ln(e+x))^{\frac{1}{x}} & g(x) &= \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} \\ h(x) &= \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & j(x) &= \frac{\cos(px) - \cos(qx)}{x^2} \end{aligned}$$

3. Montrer que :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x + \sin x - 2x}{x(\operatorname{ch} x + \cos x - 2)} &= \frac{1}{5} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{Arcsin} x}{\sin^3 x} &= -\frac{1}{6} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \log_{10}(x+9)}{e^{\sin \pi x} + \cos(\pi x)} &= \frac{1}{10\pi \ln 10} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} &= \ln\left(\frac{a}{b}\right) \quad (a, b > 0) \end{aligned}$$

4. Étudier au voisinage de $+\infty$ les branches infinies des courbes des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x(x+1)} & g(x) &= (x+1) \operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{2}{x}\right) & h(x) &= e^{\frac{2}{x}} \sqrt{1+x^2} \\ j(x) &= (x^2-1) \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) & k(x) &= \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \end{aligned}$$

5. Construire les courbes représentatives des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+1)e^{\frac{1}{x}} & g(x) &= \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2-1}} \\ h(x) &= \left(x + \frac{3}{2}\right) e^{\frac{2}{x}} & j(x) &= \frac{x-1}{x \ln x} \end{aligned}$$

6. Déterminer a, b, c réels de sorte que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax + bx^3}{1 + cx^2} - \operatorname{Arcsin} x$$

soit équivalent en zéro à λx^n avec $\lambda \neq 0$ et n aussi grand que possible.

7. Étudier au voisinage de zéro les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{x} & g(x) &= \frac{2}{e^{2x} - 1} \\ h(x) &= \sqrt{1 + \sqrt{1+x}} & j(x) &= (2e^x - e^{-x})^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

8. Étudier la limite de la suite (U_n) définie par

$$U_n = \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2}}$$

9. Soit $a > b$; préciser la limite éventuelle en 0 de

$$t \mapsto \frac{e^{at} - e^{bt}}{t}$$

Préciser aussi la limite éventuelle en $+\infty$.

10. Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \frac{(x+1)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{m}}}$$

Donner un équivalent de φ en 0 puis en $+\infty$.

11. Donner le développement limité de $\tan$ en 0 à l'ordre 2. En utilisant le fait que $\tan' = 1 + \tan^2$, déterminer le développement limité de $\tan$ en 0 à l'ordre 4, puis 6, puis 8.

Comparer cette méthode aux autres méthodes usuelles.

12. Déterminer le développement limité à l'ordre 10 en 0 de

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

13. Déterminer le développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 de

$$f(x) = \ln \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right)$$

14. Soit f la fonction définie par $f(x) = x \operatorname{ch} x$.

a) Montrer que f est bijective. On note g sa bijection réciproque.

b) Justifier que g admet un développement limité en 0 à l'ordre 5 de la forme

$$g(u) = a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5 + o(u^5)$$

c) Sachant que $f \circ g = \operatorname{id}_{\mathbb{R}}$, déterminer ce développement.

15. Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $\binom{n}{p}$ avec p un entier fixé.

16. Montrer que $e^f \underset{a}{\sim} e^g \iff \lim_a f - g = 0$. Donner un exemple où $f \underset{a}{\sim} g$ avec cependant $e^f \not\underset{a}{\sim} e^g$.

17. Si $f \underset{a}{\sim} g$, peut-on affirmer que $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$. Préciser.

18. Peut-on prolonger par continuité en 0 la fonction f définie pour $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\operatorname{Arcsin} x - \operatorname{Arctan} x}{\operatorname{sh} x - \sin x} \quad ?$$

19. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de a , déterminer la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

Commentaire ?

20. Soit $n \geq 1$, on considère l'équation

$$f_n(x) = x^5 + nx - 1 = 0 \quad (E_n)$$

1) Montrer que (E_n) admet une unique racine dans $\mathbb{R}^+$. On la note a_n .

2) Calculer $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$. En déduire que $0 < a_n < \frac{1}{n}$ et conclure.

3) Montrer que $a_n \sim \frac{1}{n}$.

4) Montrer que

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

2 Correction des exercices

Exercice 1.

Soit x un réel quelconque. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Quelle est la limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$?

☞ Nous avons

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}$$

Or

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \sim \frac{x}{n}$$

et ainsi

$$n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \sim x$$

ce qui permet de conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

En particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Si vous trouvez comme limite 1, chercher l'erreur commise ...

Exercice 2.

Calculer la limite en zéro des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= (\ln(e+x))^{\frac{1}{x}} & g(x) &= \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} \\ h(x) &= \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & j(x) &= \frac{\cos(px) - \cos(qx)}{x^2} \end{aligned}$$

☞ On écrit déjà

$$f(x) = (\ln(e+x))^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln \ln(e+x)}$$

On a

$$\ln(e+x) = \ln e \left(1 + \frac{x}{e}\right) = \ln e + \ln\left(1 + \frac{x}{e}\right) = 1 + \frac{x}{e} + o_0(x)$$

Puis en composant

$$\ln \ln(e+x) = \frac{x}{e} + o_0(x)$$

Ainsi

$$\frac{1}{x} \ln \ln(e+x) \sim \frac{1}{e}$$

et finalement

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e+x))^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{e}}$$

De la même façon, on a

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)}$$

On écrit

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)$$

d'où

$$\frac{1}{x} \ln(1+x) = 1 - \frac{x}{2} + o_0(x)$$

D'où

$$e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e \times e^{-\frac{x}{2} + o_0(x)}$$

et ainsi par composition à l'ordre 1

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \left(1 - \frac{x}{2} + o_0(x) \right) = e - \frac{e}{2}x + o_0(x)$$

Ainsi

$$g(x) = \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = -\frac{e}{2} + o_0(1)$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = -\frac{e}{2}$$

On a

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1 + \frac{1}{2}x - \left(1 - \frac{1}{2}x \right) + o_0(x) = x + o_0(x)$$

et ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$$

On sait que

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + o_0(u^2)$$

et ainsi

$$\cos(px) = 1 - \frac{p^2}{2}x^2 + o_0(x^2)$$

et donc

$$\cos(px) - \cos(qx) = \frac{q^2 - p^2}{2}x^2 + o_0(x^2)$$

et ainsi

$$j(x) = \frac{\cos(px) - \cos(qx)}{x^2} = \frac{q^2 - p^2}{2} + o_0(1)$$

Donc finalement

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(px) - \cos(qx)}{x^2} = \frac{q^2 - p^2}{2}$$

Exercice 3.

Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x + \sin x - 2x}{x(\operatorname{ch} x + \cos x - 2)} = \frac{1}{5} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{Arcsin} x}{\sin^3 x} = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \log_{10}(x+9)}{e^{\sin \pi x} + \cos(\pi x)} = \frac{1}{10\pi \ln 10} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \ln \left(\frac{a}{b} \right) \quad (a, b > 0)$$

☞ • On a

$$\operatorname{sh} x + \sin x - 2x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - x^2 + o_0(x^5) \underset{0}{\sim} \frac{x^5}{60}$$

ainsi que

$$\operatorname{ch} x + \cos x - 2 = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 2 + o_0(x^4) \underset{0}{\sim} \frac{x^4}{12}$$

Ainsi

$$\frac{\operatorname{sh} x + \sin x - 2x}{x(\operatorname{ch} x + \cos x - 2)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{5}$$

• On a

$$x - \operatorname{Arcsin} x = x - x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$$

et ainsi

$$\frac{x - \operatorname{Arcsin} x}{\sin^3 x} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{6}$$

• Posons $x = 1 + u$,

$$\log_{10}(x + 9) = \log_{10}(10 + u) = \frac{\ln(10 + u)}{\ln 10} = \frac{\ln 10 + \ln\left(1 + \frac{u}{10}\right)}{\ln 10} = 1 + \frac{u}{10 \ln(10)} + o_0(u)$$

et ainsi

$$1 - \log_{10}(x + 9) \underset{1}{\sim} -\frac{x - 1}{10 \ln(10)}$$

On a aussi

$$e^{\sin \pi x} + \cos(\pi x) = e^{\sin(\pi u + \pi)} + \cos(\pi u + \pi) = e^{-\sin(\pi u)} - \cos(\pi u)$$

Or

$$\sin(\pi u) = \pi u + o_0(u)$$

et ainsi par composée

$$e^{-\sin(\pi u)} = 1 - \pi u + o_0(u)$$

et ainsi

$$e^{-\sin(\pi u)} - \cos(\pi u) = -\pi u + o_0(u)$$

ce qui conduit à

$$e^{\sin \pi x} + \cos(\pi x) \underset{1}{\sim} -\pi(x - 1)$$

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \log_{10}(x + 9)}{e^{\sin \pi x} + \cos(\pi x)} = \frac{1}{10\pi \ln 10}$$

• On écrit

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + o_0(x)$$

et ainsi (on évite l'équivalent à 0 si $a = b$)

$$a^x - b^x = (\ln a - \ln b)x + o_0(x) = \ln \frac{a}{b} x + o_0(x)$$

et ainsi

$$\frac{a^x - b^x}{x} = \ln \frac{a}{b} + o_0(1)$$

On a donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \ln \left(\frac{a}{b} \right)$$

Exercice 4.

Étudier au voisinage de $+\infty$ les branches infinies des courbes des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x(x+1)} & g(x) &= (x+1) \operatorname{Arctan} \left(1 + \frac{2}{x}\right) & h(x) &= e^{\frac{2}{x}} \sqrt{1+x^2} \\ j(x) &= (x^2-1) \ln \left(\frac{x+1}{x-1}\right) & k(x) &= \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \end{aligned}$$

☞ • Nous avons si $x = \frac{1}{u} > 0$, $u > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1/u) = \sqrt{\frac{1}{u} \left(\frac{1}{u} + 1\right)} \\ &= \frac{1}{u} \sqrt{1+u} \\ &= \frac{1}{u} \left(1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o_0(u^2)\right) \\ &= \frac{1}{u} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}u + o_0(u) \\ &= x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

et ainsi la courbe de f admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ et la courbe est située en dessous de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

• Nous avons si $x = \frac{1}{u} > 0$, $u > 0$,

$$\begin{aligned} g(x) &= g(1/u) = (1/u + 1) \operatorname{Arctan}(1 + 2u) \\ &= (1/u + 1) \left(\operatorname{Arctan} 1 + \operatorname{Arctan}' 1 \times 2u + \operatorname{Arctan}'' 1 \times 2u^2 + o_0(u^2) \right) \\ &= (1/u + 1) \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \times 2u - u^2 + o_0(u^2) \right) \\ &= \frac{\pi}{4u} + \frac{\pi}{4} + 1 + o_0(u) \\ &= \frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4} + 1 + o_{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

et ainsi la courbe de g admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4} + 1$, mais nous n'obtenons pas les positions relatives ; on a

$$\begin{aligned} g(x) &= g(1/u) = (1/u + 1) \operatorname{Arctan}(1 + 2u) \\ &= (1/u + 1) \left(\operatorname{Arctan} 1 + \operatorname{Arctan}' 1 \times 2u + \operatorname{Arctan}'' 1 \times 2u^2 + \operatorname{Arctan}'''(1) \times \frac{8}{6}u^3 + o_0(u^3) \right) \\ &= (1/u + 1) \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \times 2u - u^2 + 2u^3 + o_0(u^3) \right) \\ &= \frac{\pi}{4u} + \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{1}{3}u^2 + o_0(u^2) \\ &= \frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{1}{3x^2} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

La courbe est située en dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

- Nous avons si $x = \frac{1}{u} > 0$, $u > 0$,

$$\begin{aligned}
 h(x) &= h(1/u) = e^{2u} \sqrt{1 + 1/u^2} = \frac{1}{u} e^{2u} \sqrt{1 + u^2} \\
 &= \frac{1}{u} (1 + 2u + 2u^2 + o_0(u^2)) (1 + \frac{1}{2}u^2 + o_0(u^2)) \\
 &= \frac{1}{u} (1 + 2u + \frac{5}{2}u^2 + o_0(u^2)) \\
 &= \frac{1}{u} + 2 + \frac{5}{2}u + o_0(u) \\
 &= x + 2 + \frac{5}{2x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)
 \end{aligned}$$

et ainsi la courbe de h admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x + 2$ et la courbe est située au dessus de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

- Nous avons si $x = \frac{1}{u} > 0$, $u > 0$,

$$\begin{aligned}
 j(x) &= j(1/u) = (1/u^2 - 1) \ln\left(\frac{1/u + 1}{1/u - 1}\right) \\
 &= \frac{1 - u^2}{u^2} \ln\left(\frac{1 + u}{1 - u}\right) = \frac{1 - u^2}{u^2} (\ln(1 + u) - \ln(1 - u)) \\
 &= \frac{1 - u^2}{u^2} \left(2u + \frac{2}{3}u^3 + o_0(u^3)\right) \\
 &= \frac{(1 - u^2)(2 + \frac{2}{3}u^2 + o_0(u^2))}{u} \\
 &= \frac{2}{u} - \frac{4}{3}u + o_0(u) \\
 &= 2x - \frac{4}{3x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)
 \end{aligned}$$

et ainsi la courbe de k admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = 2x$ et la courbe est située en dessous de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

- Nous avons si $x = \frac{1}{u} > 0$, $u > 0$,

$$\begin{aligned}
 k(x) &= k(1/u) = \sqrt{\frac{1}{u^2 - u^3}} = \frac{1}{u} \sqrt{\frac{1}{1 - u}} \\
 &= \frac{1}{u} \left(1 + \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + o_0(u^2)\right) \\
 &= \frac{1}{u} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}u + o_0(u) \\
 &= x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)
 \end{aligned}$$

et ainsi la courbe de k admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ et la courbe est située en dessous de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 5.

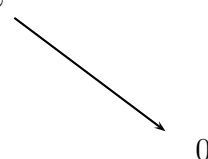
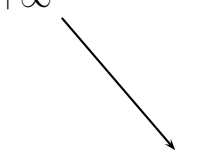
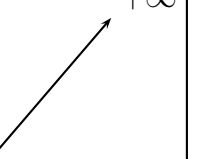
Construire les courbes représentatives des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 1)e^{\frac{1}{x}} & g(x) &= \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^2 - 1}} \\ h(x) &= \left(x + \frac{3}{2}\right)e^{\frac{2}{x}} & j(x) &= \frac{x-1}{x \ln x} \end{aligned}$$

• La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$, dérivable avec

$$f'(x) = \left[2x - \frac{x^2 + 1}{x^2}\right] e^{\frac{1}{x}} = \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = \frac{(x-1)(2x^2 + 1)}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

On en déduit les variations de la fonction f :

x	$+\infty$	0			$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$ 	0	$+\infty$ 		$+\infty$ 

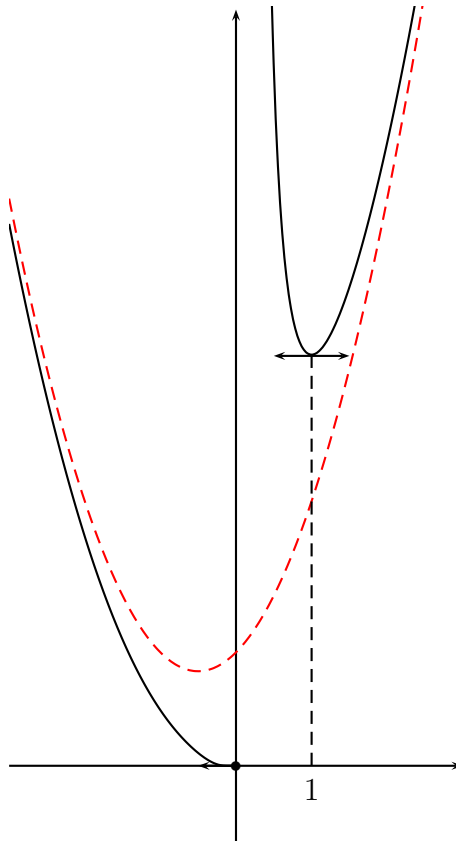
On étudie alors les branches infinies à préciser. En $\pm\infty$, $x = \frac{1}{u}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1/u) = \left(\frac{1}{u^2} + 1\right) e^u \\ &= \frac{1+u^2}{u^2} e^u = \frac{1}{u^2} (1+u^2)(1+u+u^2/2 + o_0(u^2)) \\ &= \frac{1}{u^2} \left(1+u+\frac{3}{2}u^2 + o_0(u^2)\right) \\ &= \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} + \frac{3}{2} + o_0(1) \\ &= x^2 + x + \frac{3}{2} + o_\infty(1) \end{aligned}$$

et ainsi f admet en $\pm\infty$ une courbe parabolique asymptote d'équation $y = x^2 + x + \frac{3}{2}$. Nous n'avons pas les positions relatives.

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(1/u) = \left(\frac{1}{u^2} + 1 \right) e^u \\
&= \frac{1+u^2}{u^2} e^u = \frac{1}{u^2} (1+u^2) \left(1 + u + u^2/2 + \frac{u^3}{6} o_0(u^2) \right) \\
&= \frac{1}{u^2} \left(1 + u + \frac{3}{2}u^2 + \frac{7}{6}u^3 + o_0(u^3) \right) \\
&= \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} + \frac{3}{2} + \frac{7}{6}u + o_0(u) \\
&= x^2 + x + \frac{3}{2} + \frac{7}{6x} + o_\infty\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

et ainsi la courbe est située au dessus en $+\infty$, et en dessous en $-\infty$.



On peut aussi étudier la concavité, par le biais de la dérivée seconde. Nous avons si x non nul

$$f''(x) = \frac{2x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$$

On pose $P(x) = 2x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$, on a par exemple pour obtenir la positivité (que l'on peut intuer sur le graphique)

$$\begin{aligned}
P(x) &= 2(x^4 - x^3) + x^2 + 2x + 1 = 2((x^2 - 1/2x)^2 - 1/4x^2) + x^2 + 2x + 1 \\
&= 2(x^2 - 1/2x)^2 + 1/2x^2 + 2x + 1 \\
&= 2(x^2 - 1/2x)^2 + 1/2(x + 1/2)^2 + 7/8 > 0
\end{aligned}$$

et on obtient ce que l'on pouvait imaginer graphiquement que f est une fonction convexe sur les intervalles $] - \infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

- La fonction g est définie sur $] - \infty, -1[\cup]1, +\infty[$, paire (on étudie normalement uniquement sur $]1, +\infty[$ donc) dérivable avec

$$g'(x) = \frac{4x^3(x^2 - 1) - 2x(x^4 + 1)}{2(x^2 - 1)^2 g(x)} = x \frac{2x^4 - 2x^2 - x^4 - 1}{(x^2 - 1)^2 g(x)} = x \frac{x^4 - 2x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2 g(x)}$$

et

$$x^4 - 2x^2 - 1 = (x^2 - 1)^2 - 2 = (x^2 - 1 - \sqrt{2})(x^2 - 1 + \sqrt{2})$$

du signe de

$$x^2 - 1 - \sqrt{2} = (x - \sqrt{1 + \sqrt{2}})(x + \sqrt{1 + \sqrt{2}})$$

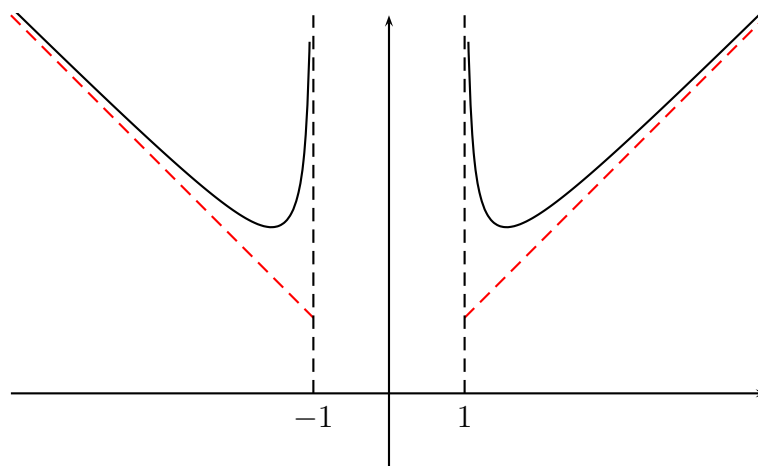
On en déduit les variations de g :

x	$-1 - \sqrt{2}$		-1	1	$1 + \sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+		-	0	+
g	$+\infty$ ↘		↗ $+\infty$		$+\infty$ ↘	↗ $+\infty$	

Nous avons si $x = \frac{1}{u}$, attention au signe,

$$\begin{aligned}
 g(x) &= g(1/u) = \sqrt{\frac{1/u^4 + 1}{1/u^2 - 1}} = \sqrt{\frac{1 + u^4}{u^2 - u^4}} = \frac{1}{u} \sqrt{\frac{1 + u^4}{1 - u^2}} \\
 &= \frac{\text{sg}(u)}{u} \sqrt{1 + u^4} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \\
 &= \frac{\text{sg}(u)}{u} (1 + o(u^2)) (1 + \frac{1}{2}u^2 + o_0(u^2)) \\
 &= \frac{\text{sg}(u)}{u} + \frac{1}{2}u + o_0(u) \\
 &= \text{sg}(x) \left[x + \frac{1}{2x} + o_\infty\left(\frac{1}{x}\right) \right]
 \end{aligned}$$

et ainsi la courbe de g admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x$ et la courbe est située au dessus de cette asymptote au voisinage de $+\infty$, et une asymptote d'équation $y = -x$ en $-\infty$, et au dessus aussi.



- La fonction h est définie sur $\mathbb{R}^*$, dérivable avec

$$h'(x) = \left[1 - \frac{2}{x^2}(x + 3/2) \right] e^{\frac{2}{x}} = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2} e^{\frac{2}{x}}$$

qui est du signe de $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$, d'où les variations de h :

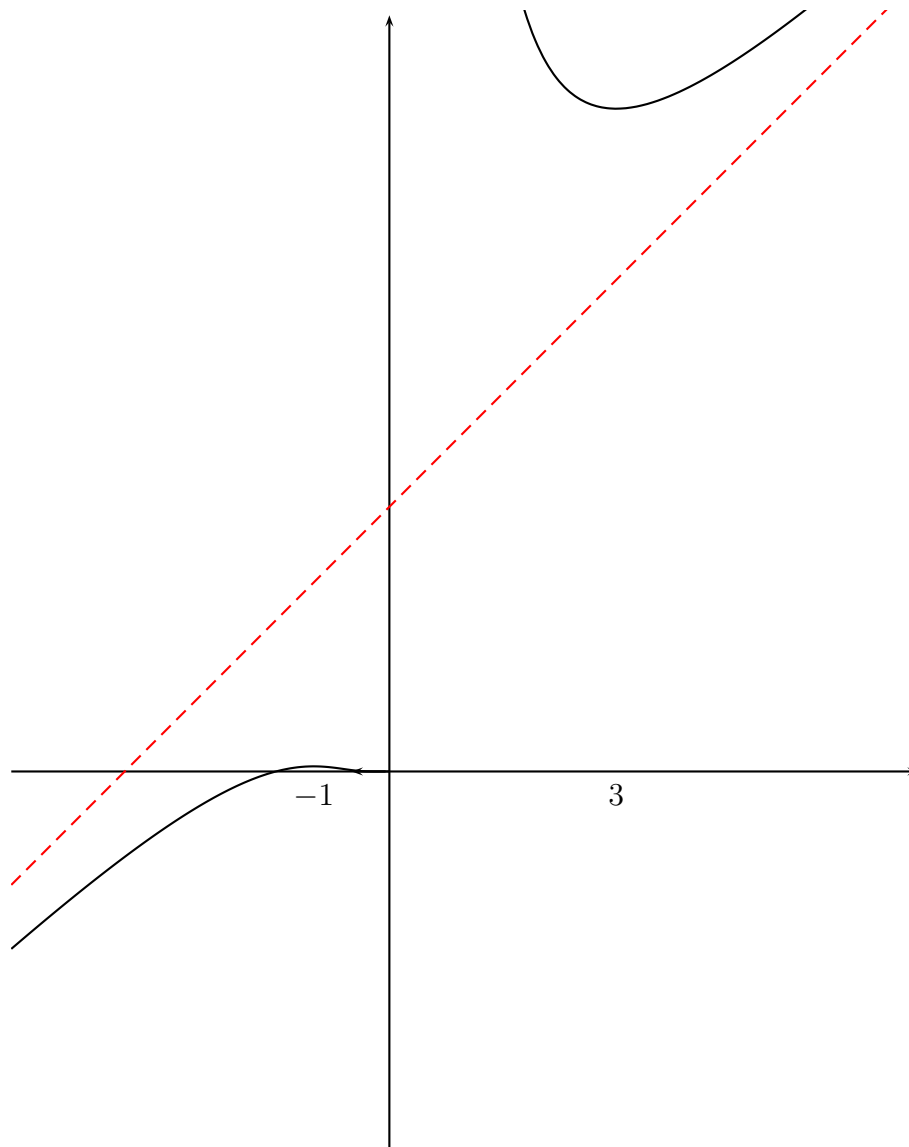
x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
h	$-\infty$			$+\infty$		$+\infty$

On a $h'(x)$ qui tend à gauche de 0 vers 0 (l'exponentielle l'emporte) et nous avons alors une demi-tangente fictive à gauche horizontale.

En $\pm\infty$, $x = \frac{1}{u}$, on a

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \left(\frac{1}{u} + \frac{3}{2} \right) e^{2u} \\
 &= \left(\frac{1}{u} + \frac{3}{2} \right) (1 + 2u + 2u^2 + o_0(u^2)) \\
 &= \frac{1}{u} + \frac{3}{2} + 2 + \frac{3}{2}u + 2u + o_0(u) \\
 &= x + \frac{7}{2} + \frac{5}{x} + o_\infty\left(\frac{1}{x}\right)
 \end{aligned}$$

et ainsi la courbe de h admet une asymptote d'équation $y = x + \frac{7}{2}$ en $\pm\infty$, et la courbe est située au dessus en $+\infty$ et au dessous en $-\infty$.



On peut aussi étudier la convexité.

- La fonction j est définie sur $]0, +\infty[\setminus\{1\}$, dérivable avec

$$j'(x) = \frac{x \ln x - (x-1)(\ln x + 1)}{x^2 \ln^2 x} = \frac{\ln x - x + 1}{x^2 \ln^2 x}$$

du signe de $\ln(x) - x + 1$, négatif par concavité, nul uniquement si $x = 1$ qui est exclu de toute façon. On en déduit les variations de j :

x	0	1	$+\infty$
$j'(x)$		—	—
j	$+\infty$		0

On étudie la dérivabilité du prolongement en 1. On a

$$\frac{j(x) - 1}{x - 1} = \frac{\frac{x-1}{x \ln x} - 1}{x - 1} = \frac{x - 1 - x \ln x}{x(x - 1) \ln x} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{x - 1 - x \ln x}{(x - 1) \ln x}$$

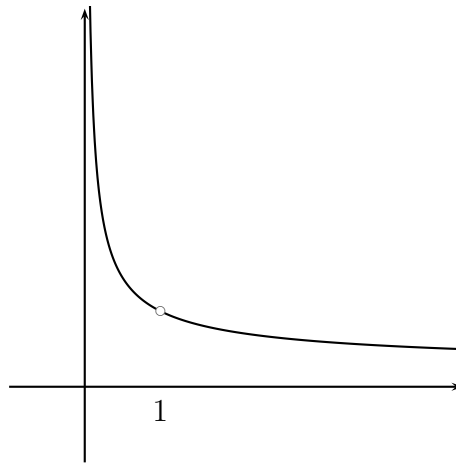
Or on a $\ln x \sim_1 x - 1$ et

$$\ln x = \ln(1 + x - 1) = x - 1 - \frac{(x - 1)^2}{2} + o_1((x - 1)^2) \quad x = 1 + x - 1$$

et ainsi

$$x - 1 - x \ln x = (x - 1) - (1 + x - 1)(x - 1 - \frac{(x - 1)^2}{2} + o_1((x - 1)^2)) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + o_1((x - 1)^2)$$

et finalement $j(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} -\frac{1}{2}$, soit en tangente en 1 de pente $-\frac{1}{2}$.



Exercice 6.

Déterminer a, b, c réels de sorte que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax + bx^3}{1 + cx^2} - \text{Arcsin } x$$

soit équivalent en zéro à λx^n avec $\lambda \neq 0$ et n aussi grand que possible.

☞ Comme il y a trois paramètres, que f est impaire, nous effectuons à priori un développement limité en 0 de f à l'ordre 7. On obtient

$$f(x) = (a - 1)x + \left(b - ac - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left[c(ac - b) - \frac{3}{40}\right]x^5 + \left(bc^2 - ac^3 - \frac{5}{112}\right)x^7 + o_0(x^7)$$

On choisit alors $a = 1$, puis b et c de sorte que

$$b - ac - \frac{1}{6} = 0 \quad c(ac - b) - \frac{3}{40} = 0$$

soit en fait

$$b - c = \frac{1}{6} \quad -\frac{1}{6}c = \frac{3}{40}$$

soit $c = -\frac{18}{40} = -\frac{9}{20}$ et

$$b = \frac{1}{6} + c = \frac{1}{6} - \frac{9}{20} = \frac{10 - 27}{60} = -\frac{17}{60}$$

Nous avons alors

$$f(x) = \left(bc^2 - ac^3 - \frac{5}{112} \right) x^7 + o_0(x^7) = -\frac{61}{5600} x^7 + o_0(x^7)$$

et donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{61}{5600} x^7$$

Exercice 7.

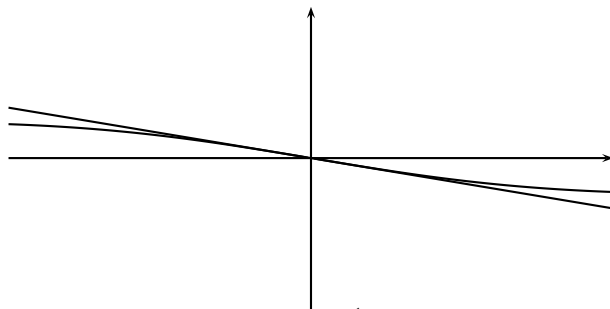
Étudier au voisinage de zéro les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{x} & g(x) &= \frac{2}{e^{2x} - 1} \\ h(x) &= \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}} & j(x) &= (2e^x - e^{-x})^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

☞ La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$. On obtient

$$f(x) = -\frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + o_0(x^3)$$

et ainsi on peut prolonger f par continuité en 0, et on obtient alors une fonction dérivable en 0, avec une tangente d'équation $y = -\frac{x}{6}$, avec la courbe situé en dessous puis au dessus de cette tangente au voisinage de 0.



On a

$$g(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$$

et ainsi g tend vers ∞ en 0, selon le signe de x .

La fonction h est définie sur $[-1, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$. On a

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

et ainsi

$$1 + \sqrt{1+x} = 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) = 2 \left(1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + o(x^2) \right)$$

d'où

$$h(x) = \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + o(x^2)}$$

] et en composant à l'ordre 2, avec

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2) \quad u = \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 = \frac{x}{4}\left(1 - \frac{1}{4}x\right)$$

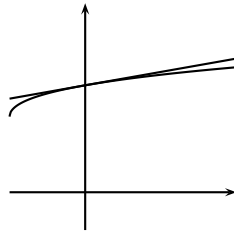
on obtient

$$h(x) = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 \right) - \frac{1}{8} \frac{x^2}{16} \right) + o_0(x^2)$$

On obtient finalement

$$h(x) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}x - \frac{5\sqrt{2}}{128}x^2 + o_0(x^2)$$

et ainsi h admet une tangente en 0 d'équation $y = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}x$ et la courbe est située en dessous de cette tangente au voisinage de 0.



Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$2e^x - e^{-x} = e^x(2 - e^{-2x})$$

et

$$2 - e^{-2x} > 0 \iff 2 > e^{-2x} \iff \ln(2) > -2x \iff x > -\frac{\ln 2}{2}$$

Ainsi j est définie au voisinage de 0, de classe $\mathcal{C}^\infty$. On obtient

$$j(x) = e^3 - 4e^3x + 16e^3x^2 + o_0(x^2)$$

Donc j admet comme tangente en 0 la droite d'équation $y = e^3 - 4e^3x$ et la courbe est située au dessus de cette tangente au voisinage de 0.

Exercice 8.

Étudier la limite de la suite (U_n) définie par

$$U_n = \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2}}$$

On écrit

$$U_n = e^{(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2}) \ln[e - (1 + \frac{1}{n})^n]}$$

On a dans un premier temps

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2} &= -\frac{1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2}} = -\frac{1}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} \right)} = -\frac{1}{n(2 + o_0(1))} \\ &\sim -\frac{1}{2n} \end{aligned}$$

On a aussi

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} = e^{n(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} = e^{1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} = e \left[1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

et donc

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi

$$\ln \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] = 1 - \ln(2n) + \ln(1 + o(1))$$

On a alors

$$(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 2}) \ln \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] = -\frac{1}{2n} + \frac{\ln(2n)}{2n} - \frac{\ln(1 + o(1))}{2n}$$

qui tend vers 0 et ainsi la suite (U_n) converge vers 1.

Exercice 9.

Soit $a > b$; préciser la limite éventuelle en 0 de

$$t \mapsto \frac{e^{at} - e^{bt}}{t}$$

Préciser aussi la limite éventuelle en $+\infty$.

☞ On a

$$\frac{e^{at} - e^{bt}}{t} = \frac{1 + (at) - (1 + bt) + o_0(t)}{t} = a - b + o_0(1)$$

et ainsi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{at} - e^{bt}}{t} = a - b$$

En $+\infty$, on écrit

$$\frac{e^{at} - e^{bt}}{t} = \frac{e^{at}}{t} (1 - e^{(b-a)t})$$

Comme $b - a < 0$, on a déjà $1 - e^{(b-a)t}$ qui tend vers 1.

– si $a > 0$, on a alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{at} - e^{bt}}{t} = +\infty$$

– si $a = 0$, et si $a < 0$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{at} - e^{bt}}{t} = 0$$

Exercice 10.

Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \frac{(x+1)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{m}}}$$

Donner un équivalent de φ en 0 puis en $+\infty$.

☞ On a

$$x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad (1+x)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

et ainsi

$$\varphi(x) = \frac{(x+1)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{m}}} \underset{0}{\sim} x^{-\frac{1}{m}}$$

En $+\infty$, nous avons

$$\varphi(x) = \frac{\left(x \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{m}}} = x^{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \left(x^{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} - 1}\right)$$

Exercice 11.

Donner le développement limité de $\tan$ en 0 à l'ordre 2. En utilisant le fait que $\tan' = 1 + \tan^2$, déterminer le développement limité de $\tan$ en 0 à l'ordre 4, puis 6, puis 8.

Comparer cette méthode aux autres méthodes usuelles.

☞ On commence par $\tan x \sim x$ et ainsi

$$\tan x = x + o_0(x) = x + o_0(x^2)$$

puisque la fonction tangente est impaire. Puis

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = 1 + x^2 + o_0(x^2)$$

et en fait par parité

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = 1 + x^2 + o_0(x^3)$$

que l'on intègre

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o_0(x^4)$$

Et on recommence le procédé :

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o_0(x^4) = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o_0(x^5)$$

que l'on intègre

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o_0(x^6)$$

Puis de même

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{x^6}{9} + \frac{4}{15}x^6 + o_0(x^6) = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{17}{45}x^6 + o_0(x^7)$$

que l'on intègre

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o_0(x^8)$$

Autres méthodes possibles : utilisation de la formule de Taylor-Young : nécessite de calculer les dérivées successives de $\tan$ (lourd) ; effectuer le développement limité d'une fraction, ce qui nécessite une composée (lourd aussi).

Exercice 12.

Déterminer le développement limité à l'ordre 10 en 0 de

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

☞ Comme

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + o_0(u^2)$$

on a par pré-composition et la parité (pour l'ordre 9)

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} = 1 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{8}t^8 + o_0(t^9)$$

et ainsi par intégration

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = x - \frac{x^4}{2} + \frac{3}{8}x^9 + o_0(x^{10})$$

et par pré-composition de nouveau (et troncature à l'ordre 10)

$$\int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = x^2 - \frac{x^8}{2} + o_0(x^{10})$$

et ainsi finalement

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \\ &= x^2 - \frac{x^8}{2} - x + \frac{x^4}{2} - \frac{3}{8}x^9 + o_0(x^{10}) \\ &= -x + x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{2} - \frac{3}{8}x^9 + o_0(x^{10}) \end{aligned}$$

Exercice 13.

Déterminer le développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 de

$$f(x) = \ln \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right)$$

☞ La composition semble une voie sans issue, ou en tout cas une voie bien difficile. La fonction f est définie et dérivable au voisinage de 0, et on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}} = 1 - \frac{\frac{x^n}{n!}}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}} \\ &= 1 - \frac{x^n}{n!}(1 + o_0(1)) = 1 - \frac{x^n}{n!} + o_0(x^n) \end{aligned}$$

que l'on intègre en

$$f(x) = x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o_0(x^{n+1})$$

Exercice 14.

Soit f la fonction définie par $f(x) = x \operatorname{ch} x$.

a) Montrer que f est bijective. On note g sa bijection réciproque.

b) Justifier que g admet un développement limité en 0 à l'ordre 5 de la forme

$$g(u) = a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5 + o(u^5)$$

c) Sachant que $f \circ g = \operatorname{id}_{\mathbb{R}}$, déterminer ce développement.

☞ La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable avec

$$f'(x) = \operatorname{ch}(x) + x \operatorname{sh}(x)$$

Or $\operatorname{ch} x \geq 1$ et $x \operatorname{sh}(x) \geq 0$ et ainsi $f' > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle établit une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur son image qui est (calcul de limites immédiat) $\mathbb{R}$. On note g sa réciproque, continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Comme $f' > 0$, g est dérivable et on a

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}$$

Comme g continue, f' continue, g' continue et ainsi g est de classe $\mathcal{C}^1$.

Comme f' et g de classe $\mathcal{C}^1$, g' aussi et ainsi g est de classe $\mathcal{C}^2$.

Par récurrence, on montre que g est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout entier n .

Ainsi g est de classe $\mathcal{C}^5$, au voisinage de 0. Donc g admet un développement limité en 0 à l'ordre 5.

De plus, comme f est impaire, sa réciproque g aussi, et donc le développement limité de g est impair.

On peut donc écrire

$$g(u) = a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5 + o_0(u^5)$$

On a

$$f(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5)$$

et ainsi

$$u = f \circ g(u) = f(a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5 + o_0(u^5))$$

soit par composée

$$u = a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5 + \frac{1}{6}(a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5)^3 + \frac{1}{120}(a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5)^5 + o_0(u^5)$$

et ainsi déjà par unicité du développement limité, $a_1 = 1$;

$$u = u + a_3 u^3 + a_5 u^5 + \frac{1}{6}u^3(1 + a_3 u^2 + a_5 u^4)^3 + \frac{u^5}{120}(1 + a_3 u^2 + a_5 u^4)^3 + o_0(u^5)$$

et ainsi $a_3 + \frac{1}{6} = 0$ soit $a_3 = -\frac{1}{6}$ et

$$a_5 + \frac{a_3}{3} + \frac{1}{120} = 0$$

soit

$$a_5 = -\frac{1}{120} + \frac{1}{18} = \frac{20 - 3}{360} = \frac{17}{360}$$

Ainsi

$$g(u) = u - \frac{1}{6}u^3 + \frac{17}{360}u^5 + o_0(u^5)$$

On peut aussi utiliser (plus commode ?) $g \circ f = \operatorname{id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 15.

Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $\binom{n}{p}$ avec p un entier fixé.

☞ Soit $p \in \mathbb{N}$, à partir d'un certain rang, on a $n \geq p$ bien sûr et

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \cdots (n-p+1)}{p(p-1) \cdots 1} \sim \frac{n^p}{p!}$$

puisque nous avons un produit de p termes (produit fini) et que l'équivalence est compatible avec le produit.

Exercice 16.

Montrer que $e^f \sim_a e^g \iff \lim_a f - g = 0$. Donner un exemple où $f \sim_a g$ avec cependant $e^f \not\sim_a e^g$.

☞ Comme

$$\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^{f(x)-g(x)}$$

on obtient le résultat, pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$. En prenant $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 + x$, $a = +\infty$, on a bien $f \sim_a g$ et pourtant

$$\frac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} = e^x$$

ne tend pas vers 1 en $+\infty$ ($g(x) - f(x) = x$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$).

Exercice 17.

Si $f \sim_a g$, peut-on affirmer que $\ln f \sim_a \ln g$. Préciser.

☞ La réponse est non en général. On a

$$\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} = \frac{\ln \frac{f(x)}{g(x)} + \ln g(x)}{\ln g(x)} = 1 + \frac{\ln \frac{f(x)}{g(x)}}{\ln g(x)}$$

Sachant que $f \sim_a g$, on a

$$\ln \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

Si g tend vers $\ell \in]0, +\infty[\cup \{+\infty\} \setminus \{1\}$, on aura alors

$$\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$$

et ainsi $\ln f \sim_a \ln g$.

Par contre sinon, on ne peut pas conclure :
 par exemple, si g tend vers 1 en a : avec $a = 0$ et

$$g(x) = 1 + x \quad f(x) = 1 + x^2$$

on a bien $f \sim_0 g$ mais

$$\ln f(x) \underset{0}{\sim} x^2 \quad \ln g(x) \sim x$$

Avec

$$g(x) = 1 + x + x^2 \quad f(x) = 1 + x$$

on a bien $f \sim_0 g$ et

$$\ln f(x) \underset{0}{\sim} x \quad \ln g(x) \sim x$$

Exercice 18.

Peut-on prolonger par continuité en 0 la fonction f définie pour $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\operatorname{Arcsin} x - \operatorname{Arctan} x}{\operatorname{sh} x - \sin x} \quad ?$$

☞ On a

$$\operatorname{sh} x - \sin x = x + \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o_0(x^5)$$

et ainsi en intégrant

$$\operatorname{Arcsin} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o_0(x^6)$$

et

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)$$

et donc

$$\operatorname{Arcsin} x - \operatorname{Arctan} x = \frac{x^3}{2} + o_0(x^3) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{2}$$

Donc $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{3}{2}$ et on peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = \frac{3}{2}$.

Exercice 19.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de a , déterminer la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

☞ D'après la formule de Taylor-Young, f admet un développement limité à l'ordre 2 en a

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + o_0(h^2)$$

Ainsi on a aussi

$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + o_0(h^2)$$

d'où

$$f(a+h) + f(a-h) - 2f(a) = h^2 f''(a) + o_0(h^2)$$

Ainsi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a)$$

Exercice 20.

Soit $n \geq 1$, on considère l'équation

$$f_n(x) = x^5 + nx - 1 = 0 \quad (E_n)$$

- 1) Montrer que (E_n) admet une unique racine dans $\mathbb{R}^+$. On la note a_n .
- 2) Calculer $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$. En déduire que $0 < a_n < \frac{1}{n}$ et conclure.
- 3) Montrer que $a_n \sim \frac{1}{n}$.
- 4) Montrer que

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o_0\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

☞ La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f'_n(x) = 5x^4 + n > 0$$

Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, continue. Or $f_n(0) = -1 < 0$ et

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^5} > 0$$

et ainsi f_n s'annule une unique fois en a_n avec $0 < a_n < \frac{1}{n}$.

Comme $0 < a_n < \frac{1}{n}$, on peut conclure que la suite (a_n) converge vers 0.

Or on a $a_n^5 + na_n - 1 = 0$ et ainsi $na_n = 1 - a_n^5$ qui converge vers 1 et ainsi

$$a_n \sim \frac{1}{n}$$

Alors

$$na_n - 1 = -a_n^5 \sim -\frac{1}{n^5}$$

et ainsi

$$a_n - \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{n^6}$$

soit encore

$$a_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^6} = o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

c'est à dire

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$