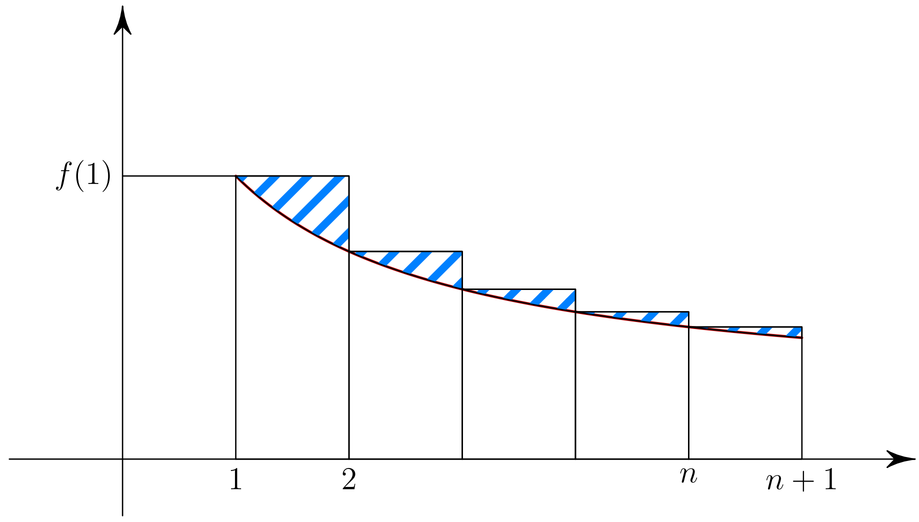
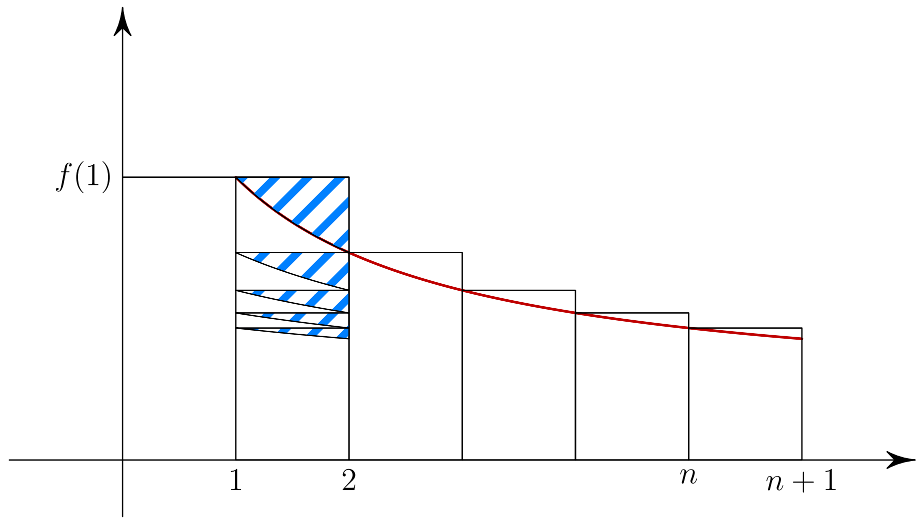
Devoir °1
3 heures

Problème

Soit $f : [1, +\infty[$ une fonction continue, positive et décroissante, de limite nulle en $+\infty$.



On se propose de démontrer cette remarque géométrique : si, on accumule les erreurs commises en remplaçant les surfaces associées à la courbe par les surfaces associées aux rectangles situés au-dessus de la courbe, dans le premier rectangle entre 1 et 2 (par exemple), on constate que l'on obtient une suite croissante, majorée par la surface du premier rectangle soit $f(1)$, qui donc sera convergente vers une constante notée γ_f.



On pose

$$a_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$$

et

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

1. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$f(k+1) < \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x < f(k)$$

2. En déduire que pour tout entier k non nul, on a

$$0 < a_k < f(k) - f(k+1)$$

3. En déduire que

$$0 < A_n < f(1) - f(n+1) < f(1)$$

   et que la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.
4. Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
5. Montrer que la suite (A_n) converge vers une limite que l'on notera γ_f.
6. Montrer que

$$A_{n-1} = f(1) + \cdots + f(n-1) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$

7. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)\mathrm{d}x + \gamma_f + \mathrm{o}(1)$$

8. En déduire que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que si l'on note dans ce cas $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ cette limite, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x + \gamma_f$$

9. En déduire qu'il existe une constante [1] γ réelle telle que

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

   Montrer que $1 - \ln 2 < \gamma$.
10. Étudier les variations de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

    sur $]0, +\infty[$.

1. il s'agit de la constante γ d'Euler-Mascheroni

11. Montrer qu'il existe une constante C réelle telle que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln^2(n)}{2} + C + \mathrm{o}(1)$$

Quelle est la nature de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n}$?

12. Montrer que la série numérique

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$$

est convergente. Est-elle absolument convergente ? On note $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles associées à cette série numérique.

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$T_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k} = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k}$$

puis que

$$T_{2n} = -\sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k}$$

et en déduire que

$$T_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} + \ln 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = S_n - S_{2n} + \ln(2) H_n$$

14. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \ln 2 \left(\gamma - \frac{\ln(2)}{2} \right).$$

* *

*

1. On suppose que f est strictement décroissante, car sinon on ne peut justifier que des inégalités larges. Soit $k \geqslant 1$, si F désigne une primitive de f on a
$$\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x = F(k+1) - F(k).$$
D'après le théorème des accroissement finis appliqué à F continue sur $[k, k+1]$, dérivable sur $]k, k+1[$, il existe $c \in]k, k+1[$, de sorte que
$$F(k+1) - F(k) = (k+1-k)F'(c) = f(c)$$
Comme la fonction f est strictement décroissante, on a
$$f(k) > f(c) > f(k+1)$$
et ainsi on obtient
$$f(k+1) < \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x < f(k)$$
Si f est décroissante, on obtient des inégalités larges, que l'on peut aussi obtenir de la façon suivante : si $x \in [k, k+1]$,
$$f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$$
que l'on intègre sur $[k, k+1]$
$$f(k+1) \times 1 \leqslant \int_k^{k+} f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(k) \times 1.$$
mais cette méthode pour une fonction strictement décroissante ne donne pas directement les inégalités strictes, qu'il faut justifier par un autre argument (par l'absurde).

2. Soit k un entier non nul, on a
$$f(k+1) < \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x < f(k)$$
d'après la question précédente, d'où en retranchant $f(k)$
$$f(k+1) - f(k) < -a_k < 0$$
soit encore
$$0 < a_k < f(k) - f(k+1).$$

3. Ainsi par sommation, on obtient
$$0 < \sum_{k=1}^{n} a_k < \sum_{k=1}^{n} (f(k) - f(k+1))$$
soit encore par télescopage
$$0 < A_n < f(1) - f(n+1) < f(1).$$
Ainsi la suite $(A_n)_{n \geqslant 1}$ est bornée (minorée par 0 et majorée par $f(1)$).

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$A_{n+1} - A_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n+1} > 0$$

Donc la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

5. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant croissante et majorée, on en déduit par le théorème de convergence monotone qu'elle converge, vers une limite que l'on note γ_f.

6. Soit $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \\ & f(1) + \cdots + f(n-1) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

7. Ainsi on a

$$f(1) + \cdots + f(n) = A_{n-1} + f(n) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$

et comme (A_{n-1}) converge vers γ_f, et $(f(n))$ vers 0, on a

$$A_{n-1} = \gamma_f + \mathrm{o}(1) \qquad f(n) = \mathrm{o}(1)$$

et ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)\mathrm{d}x + \gamma_f + \mathrm{o}(1)$$

8. Ainsi la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

9. Donc il existe une constante[2] γ réelle telle que

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

Comme la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante vers γ, on a $A_1 = a_1 = 1 - \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 1 - \ln 2 < \gamma$.

10. On étudie les variations de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

sur $]0, +\infty[$.

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On a

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

2. il s'agit de la constante γ d'Euler-Mascheroni

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
g	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$1/\mathrm{e}$	$\searrow$	0

11. La fonction g est strictement décroissante sur $[3,+\infty[$. En appliquant en adaptant le principe vu ci-dessus, il existe une constante C' telle que

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln(k)}{k}=\int_3^n\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x+C'+\mathrm{o}(1)$$

soit encore en complétant

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k)}{k}&=\frac{\ln(2)}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln(k)}{k}\\&=\frac{\ln(2)}{2}+\int_3^n\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x+C'+\mathrm{o}(1)\\&=\int_1^n\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x+\frac{\ln(2)}{2}-\int_1^3\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x+C'+\mathrm{o}(1)\\&=\int_1^n\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x+C+\mathrm{o}(1)\\&=\left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^n+C+\mathrm{o}(1)\\&=\frac{\ln^2(n)}{2}+C+\mathrm{o}(1)\end{aligned}$$

Ainsi il existe une constante C réelle telle que

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k)}{k}=\frac{\ln^2(n)}{2}+C+\mathrm{o}(1)$$

On peut alors en déduire que (S_n) diverge vers $+\infty$, et ainsi la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)}{n}$ est divergente.

12. La série numérique

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$$

est alternée, et on sait que $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)_{n\geqslant 3}$ est décroissante, vers 0. Ainsi d'après le critère spécial des séries alternées de Leibniz (les premiers termes n'influencent pas la convergence), la série est convergente. Elle n'est pas absolument convergente d'après la question précédente.

13. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a en séparant les termes de rang pairs des termes de rang impairs

$$\begin{aligned}T_{2n}&=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k\ln(k)}{k}\\&=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k}\end{aligned}$$

puis en complétant la première somme par les termes de rangs pairs

$$T_{2n} = -\sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
T_{2n} &= -S_{2n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{k} \\
&= -S_{2n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2) + \ln(k)}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} + \ln 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= S_n - S_{2n} + \ln(2) H_n
\end{aligned}$$

14. Ainsi on a en remplaçant

$$T_{2n} = \frac{\ln^2(n)}{2} + C - \frac{\ln^2(2n)}{2} - C + \ln(2)(\ln(n) + \gamma) + \mathrm{o}(1)$$

soit encore en simplifiant (la constante C disparaît, elle est juste un intermédiaire de calcul)

$$T_{2n} = \ln(2)\gamma - \frac{\ln(2)^2}{2} + \mathrm{o}(1)$$

Puisque (T_{2n}) extraite de (T_n) converge vers la somme de la série, on en déduit alors que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \ln 2 \left(\gamma - \frac{\ln(2)}{2} \right).$$