

Quinzaine 1 du 14/09 au 25/09

N.B. : tout n'a pas été revu forcément, veuillez vous référer aussi à votre cours de première année, bien sûr.

Révision 1 : Révision analyse asymptotique

Comparaison des suites : relation de domination, de négligeabilité, d'équivalence (définition à partir du quotient). Notations.

Croissance comparée de $\ln^\beta(n)$, n^α et $e^{\gamma n}$.

Liens entre les relations de comparaison. Opérations sur les équivalents.

Conservation du signe et de la limite par équivalent.

Comparaison des fonctions : adaptation aux fonctions des définitions et résultats en un point ou à l'infini.

Compatibilité avec la pré-composition (composition à droite) et remarques et exemples du danger pour la post-composition (composition à gauche).

Développement limité de f au voisinage de a point ou extrémité d'un intervalle I . Cas où f Unicité, troncature d'un développement limité.

Forme normalisée $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^p(a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + o(h^n))$ et intérêt pour prévoir l'ordre d'un développement limité.

Équivalence $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_0h^p$, et signe.

Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.

Développement limité d'une composée sur des exemples.

Primitivation d'un développement limité.

Formule de Taylor-Young.

Développement à tout ordre au voisinage de 0 de

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}, \exp, \sin, \cos, x \mapsto (1+x)^\alpha, x \mapsto \ln(1+x), x \mapsto \operatorname{Arctan} x$$

Développement de $\tan$ à l'ordre 3.

Application à l'étude locale d'une fonction (prolongement par continuité, dérivabilité d'un prolongement par continuité, tangente, position relative de la courbe et de la tangente, extremum) ; exemple

de $\frac{1}{\operatorname{sh}(x)} - \frac{1}{x}$ en 0 ou $\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}$ (*) .

Application à l'étude des asymptotes, à la recherche d'équivalent pour les fonctions et les suites.

Exemple de développement limité d'une réciproque : $x \mapsto x \operatorname{ch} x$ en 0.

Développement asymptotique d'une suite définie de façon implicite (par exemple, a_n racine de $x^5 + nx - 1$).

Développement limité de la fonction $\tan$ par utilisation de la formule $\tan' = 1 + \tan^2$ (*) .

Développement de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ dans les cas $\alpha = -\frac{1}{2}$ (*) (écriture des coefficients à l'aide d'un coefficient de Newton) puis $\alpha = \frac{1}{2}$ par intégration.

Application aux développements de Arcsin et Arccos en 0.

Révision 2 : Révision suites numériques

Suite réelle. Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.

Suite définie de façon explicite, implicite, par récurrence.

Limite d'une suite réelle. Limite finie ou infinie. Unicité de la limite.

Suite convergente, divergente.

Toute suite convergente est bornée.

Opérations usuelles sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.

Passage à la limite dans les inégalités larges.

Si (u_n) converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

Utilisation d'encadrement.

Suite monotone. Théorème de la limite monotone.

Théorème des suites adjacentes. Approximations décimales d'un réel.

Suite extraite. Toute suite extraite d'une suite qui possède une limite (finie ou infinie) admet la même limite. Utilisation pour la divergence.

Cas des suites extraites des termes d'ordre pair et impair.

Suites complexes. Brève extension des définitions et résultats précédents. Limite et partie réelle et imaginaire.

Suites arithmétiques ; suites géométriques ; suites arithmético-géométriques : résolution par la méthode du point fixe (*) ou résolution par calcul des premiers termes (et éventuellement récurrence). Suites récurrentes linéaire d'ordre 2 linéaires. Résolution générale (formules admises) dans le cas réel et complexe et structure de l'ensemble des solutions. Équation caractéristique. Détermination selon les conditions initiales. Exemples.

Suites définies par u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Intervalle stable. Généralités. Cas où f est croissante (la suite (u_n) est monotone). Cas où f décroissante. Les étudiants doivent savoir représenter une telle suite.

Lien entre point fixe de f et limite éventuelle de façon directe ou par théorème avec toutes les hypothèses.

Utilisation de $g = f \circ f$ pour les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .

Utilisation du signe de θ définie par $\theta(x) = f(x) - x$.

Utilisation d'une majoration (géométrique) du type $|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$ avec ℓ un point fixe de f lorsque $0 \leq k < 1$. Obtention directe ou par le théorème des accroissements finis. Exemple avec la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

Exemple de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

Questions de cours :

- Les énoncés des définitions, des théorèmes.
- Les démonstrations marquées par (*).
- Les méthodes usuelles sur des exemples.

