Devoir surveillé n°2
3 heures

Exercice A

Soit $\alpha > 0$, on considère la série numérique

$$\sum_{n \geqslant 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

On notera u_n le terme général de cette série.

1. Représenter soigneusement la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.
   En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} u_n$ est bien définie est qu'il s'agit d'une série alternée.
2. Déterminer un équivalent de u_n et en déduire que la suite (u_n) converge vers 0.

   Toto applique le théorème de comparaison par équivalence : qu'en déduit -il ? À-t-il raison ?
3. Toto applique le théorème des séries alternées : qu'en déduit -il ? À-t-il raison ?
4. Montrer que $\sum u_n$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.
5. Démontrer que l'on a
   $$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)$$
6. Montrer alors que si $\alpha > \frac{1}{2}$, la série numérique $\sum u_n$ est convergente.
7. On suppose que $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Montrer que
   $$u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \sim -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$$
   et conclure.
8. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n$ soit convergente et comparer avec les résultats de Toto.
9. La suite positive
   $$(-1)^n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$
   est-elle décroissante ?

Exercice B

On considère la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n^2}$.

1. On pose $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$. Étudier les variations de la fonction f. En déduire que f est strictement décroissante sur $[2, +\infty[$.
2. Montrer que
$$\frac{\ln(n)}{n^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$
et en déduire la convergence de la série numérique $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n^2}$.

   On note alors R_n le reste d'ordre n, c'est à dire
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^2}$$
3. Montrer que si $N \geqslant n+1 \geqslant 2$,
$$\int_{n+1}^{N} f(x)\mathrm{d}x + \frac{\ln(N)}{N^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{\ln(k)}{k^2} \leqslant \int_{n}^{N} f(x)\mathrm{d}x$$
puis que
$$\int_{n}^{N} f(x)\mathrm{d}x - \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{\ln(N)}{N^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{\ln(k)}{k^2} \leqslant \int_{n}^{N} f(x)\mathrm{d}x$$
4. Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$. On procédera par intégration par parties.
5. En déduire un équivalent simple de R_n. On trouvera $R_n \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Problème

Dans ce problème on étudie la notion de produit infini, et on fait le lien avec la notion de somme infinie par le biais de la fonction logarithme népérien, lorsque que cela est possible.

Soit $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres complexes, avec n_0 un entier naturel, on pose pour tout entier n, $n \geqslant n_0$,
$$P_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k = u_q u_{q+1} \cdots u_n$$

La suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ est appelée la suite des produits partiels de l'objet formel produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant n_0} (a_n)$.

On dit que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant n_0} (a_n)$ converge si la suite des produits partiels $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers une limite **non nulle** notée généralement P appelée valeur produit du produit infini. Cette limite est alors notée $\displaystyle\prod_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Lorsque la suite des produits partiels $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ diverge, ou converge vers 0, on dit que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant n_0} (a_n)$ diverge.

Par abus, on peut cependant convenir que $\displaystyle\prod_{n=n_0}^{+\infty} a_n = 0$ lorsque la suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 0.

Partie A : premiers exemples

1. Montrer, en calculant et simplifiant P_n, que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ est divergent et que $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=0$.
2. De même, montrer que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant 2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ est convergent et que $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$.
3. Montrer que $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)=\frac{1}{3}$.
4. Montrer aussi que $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)=1$.

Partie B : premiers résultats

1. Étudier la convergence du produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant n_0}(a_n)$ lorsque la suite $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ s'annule.
2. Montrer que si le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant n_0}(a_n)$ converge, alors la suite $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ ne s'annule pas.
3. Montrer que si le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant n_0}(a_n)$ converge, alors la suite $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 1. On pourra calculer si $n\geqslant n_0+1$, le rapport $\frac{P_n}{P_{n-1}}$.

Partie C : lien avec les sommes infinies

On considère dans cette partie une suite $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ de réels strictement positifs.

1. Montrer que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant n_0}(a_n)$ converge si et seulement si la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0}\ln a_n$ converge et préciser dans ce cas le lien entre les valeurs $\displaystyle\prod_{n=n_0}^{+\infty}a_n$ et $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty}\ln a_n$.
2. On suppose de plus que la suite $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ est à termes dans $]1,+\infty[$ et on pose pour tout entier n, $n\geqslant n_0$, $a_n=1+u_n$.
   (a) Montrer que si le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant n_0}(a_n)$ converge, alors la suite (u_n) tend vers 0 puis en déduire que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0}u_n$ converge.
   (b) Réciproquement, montrer que si la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0}u_n$ converge, alors le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant n_0}(a_n)$ converge.
   (c) Donner alors une nouvelle preuve du fait que la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge. On pourra étudier le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
3. Étudier de même le cas où la suite $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ est à termes dans $]0,1[$.

4. On suppose dans cette question que

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\ ,\ n \geqslant 1$$

Montrer que la série $\sum(u_n)$ est divergente mais que pourtant le produit infini $\prod\limits_{n\geqslant 1}(a_n)$ converge. Conclusion ?

5. On revient au cas général et on suppose dans cette question que la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est convergente. Montrer que $\ln(1+u_n) - u_n \sim -\frac{u_n^2}{2}$ et en déduire que le produit infini $\prod\limits_{n\geqslant n_0}(a_n)$ est de même nature que la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n^2$.

6. En déduire un exemple où la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est convergente et le produit infini $\prod\limits_{n\geqslant n_0}(a_n)$ divergent.

Partie D : un autre exemple

On considère le produit infini

$$\prod_{n\geqslant 1}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$$

1. Montrer que ce produit infini converge.
2. Déterminer une expression de P_n à l'aide de factorielles.
3. En utilisant la formule de Stirling, montrer que

$$\prod_{n\geqslant 1}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

Fin

Exercice A

Soit $\alpha > 0$, on considère la série numérique

$$\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

On notera u_n le terme général de cette série.

1. $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie sur $]-1,+\infty[$, et on sait que $\ln(1+x)$ est du signe de x.
Pour $n \geqslant 2$, comme $\alpha > 0$, $n^\alpha = e^{\alpha\ln(n)} > 1$ et ainsi $\frac{1}{n^\alpha} < 1$ et donc $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \in]-1,1[$. On peut donc définir $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ et donc la série est bien définie.
On a aussi
$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$
est du signe de $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$. Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est une série alternée.

2. On sait que $\ln(1+x) \sim_0 x$ et donc puisque $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ tend vers 0 si n tend vers $+\infty$, on a
$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \sim \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$
Toto applique le théorème de comparaison par équivalence : il obtient que la série est de même nature que la série
$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$
qui est convergente par application du critère spécial des séries alternées sachant que cette nouvelle série est bien alternée et que son terme général pris en valeur absolue $\frac{1}{n^\alpha}$ tend vers 0 en décroissant. Il en déduit alors que la série
$$\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$
converge toujours si $\alpha > 0$.
Toto a raison…ner de travers, l'équivalence du terme général n'étant pas applicable en général lorsque les termes des séries ne sont pas de signe contant (à partir d'aucun rang).

3. On a
$$|u_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}$$
et ainsi $\sum u_n$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.

4. Pour préciser la nature de notre série initiale, on effectue un développement asymptotique : on a puisque
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$
$$u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)$$

5. Si $\alpha > \frac{1}{2}$, on a en fait
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$
Or les deux séries numériques $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ sont convergentes, la première par application du critère spécial et la seconde comme série de Riemann convergent et ainsi dans ce cas, la série numérique $\sum u_n$ est convergente.
6. On suppose que $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. On a alors
$$u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \sim -\frac{1}{2n^{2\alpha}} < 0$$
Et ici, par comparaison à une série de Riemann convergente, à termes de signe constant, on obtient que la série
$$\sum \left(u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$
est divergente, et ainsi comme la série
$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$
est convergente, la série $\sum u_n$ diverge forcément.
7. On en déduit que la série est convergente si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$. Hum, que dire de Toto ...
8. Elle ne peut donc pas être décroissante, car sinon on pourrait appliquer le critère spécial des séries alternées et on aurait la série
$$\sum_{n \geqslant 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$
convergente, ce qui n'est pas le cas ($\alpha = 1/2$).

Problème

Partie A :

1. Soit $n \geqslant 2$, nous avons par télescopage
$$P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$
et ainsi le produit infini diverge, et de valeur 0.
2. Soit $n \geqslant 2$, nous avons par un télescopage un peu plus subtil
$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} \\ &= \prod_{k=2}^{n} \frac{\frac{(k-1)}{k}}{\frac{k}{k+1}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{2n} \longrightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$
et ainsi le produit infini converge, et de valeur $\frac{1}{2}$.

3. On fait de même apparaître un télescopage :

$$P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k(k+1)-2}{k(k+1)} = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k-2}{k(k+1)}$$
$$= \prod_{k=2}^{n}\frac{(k+2)(k-1)}{k(k+1)} = \prod_{k=2}^{n}\frac{\frac{k+2}{k+1}}{\frac{k}{k-1}} = \frac{\frac{n+2}{n+1}\times\frac{n+1}{n}}{\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}} = \longrightarrow \frac{1}{3}$$

   et ainsi le produit infini converge, et de valeur $\frac{1}{3}$.

4. On écrit

$$P_N = (1+1)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{(-1)^{N+1}}{N}\right)$$

   ce qui permet de penser à calculer dans un premier temps P_{2N}, en regouppant

$$P_{2N} = \prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\prod_{n=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2n}\right)$$
$$= \prod_{n=1}^{N}\frac{2n}{2n-1}\prod_{n=1}^{N}\frac{2n-1}{2n} = 1$$

   Ainsi la suite (P_{2N}) converge vers 1 et

$$P_{2N+1} = P_{2N}\left(1-\frac{1}{2N+1}\right) \longrightarrow 1$$

   et ainsi, par théorème, la suite (P_n) converge aussi vers 1. Donc le produit infini converge de valeur 1.

Partie B :

1. Si la suite $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ s'annule, par exemple avec $a_{n_1} = 0$, alors pour $n \geqslant n_1$, $P_n = 0$ et ainsi la suite (P_n) est nulle à partir du rang n_1, ce qui entraîne qu'elle converge vers 0. Donc le produit diverge, de valeur 0.
2. Il s'agit de la contraposée du résultat précédent.
3. Si le produit infini converge, de valeur P, on a la suite (P_n) ainsi que la suite $(P_{n-1})_{n\geqslant n_0+1}$ par extraction qui convergent vers P. Alors si $n \geqslant n_0+1$,

$$a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \longrightarrow \frac{P}{P} = 1$$

   et donc la suite (a_n) converge vers 1.

Partie C :

1. Le produit infini converge si et seulement la suite (P_n) converge vers P non nul (donc ici >0). Or

$$\ln P_N = \sum_{n=n_0}^{N}\ln a_n$$

   et ainsi la suite (P_n) converge vers P non nul si et seulement si $\ln(P_n)$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si la série $\sum(\ln a_n)$ converge vers $\ell = \ln P$ ou encore $P = \mathrm{e}^{\ell}$ c'est à dire que l'on alors

$$\prod_{n=n_0}^{+\infty} a_n = \mathrm{e}^{\sum_{n=n_0}^{+\infty}\ln a_n}$$

2. (a) Si le produit converge, la série $\sum \ln a_n$ converge, et ainsi la suite $(\ln(a_n))$ converge vers 0 et alors (a_n) convege vers 1, soit encore (u_n) converge vers 0. Alors comme

$$\ln(a_n) = \ln(1+u_n) \sim u_n > 0$$

la convergence de la série $\sum(\ln(a_n))$ entraîne celle de la série $\sum(u_n)$.

(b) Réciproquement, si la série $\sum(u_n)$ converge, on a (u_n) qui converge vers 0 et $\ln(a_n) = \ln(1+u_n) \sim u_n > 0$ implique que la série $\sum(\ln(a_n))$ converge et que le produit infini est convergent.

(c) Dans cet exemple de produit infini, qui satisfait les conditions de la question, on a par télescopage multiplicatif

$$P_N = \prod_{n=1}^{N} \frac{n+1}{n} = N+1$$

et ainsi la suite des produits partiels (P_n) diverge vers $+\infty$. On en déduit que la série $\sum \ln(1+\frac{1}{n}$ ne peut pas être convergente et ainsi on retrouve le fait que la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

3. On obtient les mêmes résultats, la suite (u_n) étant alors de signe constant.
4. On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}$$

et ainsi le terme générél de la série numérique $\sum(u_n)$ est la somme du terme général d'une série convergente et du terme général d'une série divergente. Ainsi la série numérique $\sum(u_n)$ est divergent. Pourtant

$$\ln(a_n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

ce qui permet d'obtenir la convergence de la série numérique $\sum(\ln(a_n))$ et donc du produit infini.

Il s'agit d'un exemple où la suite (u_n) n'est pas de signe constant : on a pour tout $n \geqslant 1$, $u_{2n} > 0$ et $u_{2n-1} < 0$; les résultats précédent ne s'appliquent pas.

5. Comme la série $\sum(u_n)$ est supposée convergente, son terme général u_n tend vers 0 et ainsi

$$\ln(1+u_n) = u_n - \frac{u^2}{2} + \mathrm{o}(u_n^2)$$

soit aussi $\ln(1+u_n) - u_n \sim -\frac{u_n^2}{2}$. Si la série $\sum(u_n^2)$ converge, par équivalence (termes positifs à partir d'un certain rang), la série $\sum(\ln(1+u_n) - u_n)$ est convergente, et comme $\sum(u_n)$ est convergente, on obtient que la série $\sum(\ln(1+u_n))$ est convergente et donc le produit infini converge.

Réciproquement, si le produit converge, la série $\sum(\ln(1+u_n))$ est convergente, et comme la série $\sum(u_n)$ aussi, on en déduit que $\sum(u_n^2)$ aussi.

6. Il suffit de choisir avec $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

On a $\sum(u_n)$ convergente, $\sum(u_n^2)$ divergente et ainsi le produit

$$\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$$

est divergent.

Partie D :

1. Nous avons $a_n = 1 + u_n$ avec $u_n = -\frac{1}{4n^2}$, (a_n) est donc à terme dans $]0,1[$. Comme la série $\sum u_n$ est convergente, on en déduit que le produit infini $\prod(a_n)$ aussi, conformément à l'étude de la partie C.
2. On a

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2-1}{4k^2} = \prod_{k=1}^{n}\frac{(2k+1)(2k-1)}{4k^2} = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\prod_{k=1}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k-1) \\ &= \frac{(2n+1)!(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2^n n!)^2} = \frac{(2n+1)!(2n)!}{2^{4n}(n!)^4} = (2n+1)\frac{[(2n)!]^2}{2^{4n}(n!)^4} \end{aligned}$$

3. Ainsi, en utilisant la formule de Stirling :

$$P_n \sim 2n \times \frac{4\pi n(2n)^{4n}\mathrm{e}^{-4n}}{2^{4n}4\pi^2 n^2 n^{4n}\mathrm{e}^{-4n}} = \frac{2}{\pi}$$

d'où on peut conclure que le produit infini converge (on le sait déjà), et que

$$\boxed{\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}.}$$

Exercice B

On considère la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{\ln n}{n^2}$.

1. On pose $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ sur $]0,+\infty[$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, et on a

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{x(1-2\ln(x))}{x^4}$$

On en déduit les variations de f sur $]0,+\infty[$:

x	0		$\mathrm{e}^{1/2}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$1/2\mathrm{e}$	$\searrow$	0

Comme $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}} < 2$, on en déduit que f est strictement décroissante sur $[2,+\infty[$.

2. Nous avons
$$\frac{\frac{\ln(n)}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow 0$$
et ainsi on a bien
$$\frac{\ln(n)}{n^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$
et donc on en déduit convergence absolue et donc la convergence de la série numérique $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n^2}$.
3. Un beau dessin nous donnerait (facilement désormais)
$$\int_{n+1}^{N} f(x)\mathrm{d}x + \frac{\ln(N)}{N^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{\ln(k)}{k^2} \leqslant \int_{n}^{N} f(x)\mathrm{d}x$$
et comme on cherche à obtenir la même intégrale, on ajoute à gauche le terme négatif (puisque f décroissante, faire un dessin)
$$\int_{n}^{n+1} f(x)\mathrm{d}x - f(n)$$
et ainsi
$$\int_{n}^{N} f(x)\mathrm{d}x - \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{\ln(N)}{N^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{\ln(k)}{k^2} \leqslant \int_{n}^{N} f(x)\mathrm{d}x$$
4. On cherche alors une primitive de $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ qui est continue. On a par intégration par parties
$$\begin{aligned}\int^{x} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t &= \int^{x} \left[-\frac{1}{t}\right]' \ln(t)\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{t}\ln(t)\right]^{x} - \int^{x} -\frac{1}{t} \times \frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} + \left[-\frac{1}{t}\right]^{x} = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\end{aligned}$$
5. On en déduit que
$$\int_{n}^{N} f(x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right]_{n}^{N} = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n} - \frac{\ln(N)}{N} - \frac{1}{N}$$
et ainsi en faisant tendre N vers $+\infty$, nous obtenons
$$\frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^2} \leqslant \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n}$$
soit encore
$$\frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} \leqslant R_n \leqslant \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n}$$
et comme $\frac{1}{n}$ et $\frac{\ln(n)}{n^2}$ sont négligeables devant $\frac{\ln(n)}{n}$, on déduit que $R_n \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$: plus précisément, en divisant par $\frac{\ln(n)}{n}$,
$$1 + \frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{n} \leqslant \frac{R_n}{\frac{\ln(n)}{n}} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$
et donc par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{\frac{\ln(n)}{n}} = 1$.