

Séries numériques

Table des matières

I	Introduction.	4
	A Quelques notes historiques.	4
	B Programme officiel PCSI	5
	C Programme officiel PC	7
II	Généralités sur les séries numériques	8
	A Définition d'une série numérique	8
	B Combinaison linéaire de séries.	10
	C Troncature	10
	D Condition nécessaire de convergence. Divergence grossière.	10
	E Cas de la série géométrique.	11
	F Somme télescopique.	12
III	Séries à termes positifs.	13
	A Somme d'une série à termes positifs.	13
	B Encadrement de $\sum f(n)$ et applications	13
	1) Encadrement	13
	2) Exemples des séries de Riemann.	15
	3) Application à l'étude asymptotique de sommes partielles.	18
	4) Erreurs cumulées	19
	C Comparaison	20
	1) Comparaison par inégalité	20
	2) Comparaison à une série géométrique	21
	3) Comparaison à une série de Riemann.	24
	D Utilisation de l'équivalence.	25
IV	Séries absolument convergentes.	26
	A Définition de l'absolue convergence.	26
	B Théorème	26
	C Comparaison par domination	27
V	Applications.	29
	A Développement décimal d'un nombre réel	29
	B Caractérisation des nombres décimaux par leur développement décimal	29
	C Caractérisation des nombres rationnels par leur développement décimal	30
VI	Critère spécial des séries alternées	32
	A Séries alternées	32
	B Le théorème	32
	C Exemples	33

VII	Formule de Stirling	35
	A Intégrales de Wallis	35
	B La formule	36
	1) Une application	37
	C Qualité de l'approximation	38
VIII	Produit de Cauchy de deux séries	40
	A Motivations	40
	B Définition	40
	C Exemples	40
	D Propriété	41
	E Contre exemple	44
	F Pour aller plus loin encore	44
IX	Compléments hors programme	46
	A Règle de Cauchy	46
	B Règle d'Abel	47
	C Règle de Raabe-Duhamel	48
	D Introduction au produit infini	49
X	Série de Riemann complexe	51
XI	Exercices SPE PC	52
	A Télésopage	52
	B Calculs de sommes	53
	C Séries définies à l'aide d'une autre	53
	D Comparaison par majoration-minoration	54
	E Encadrement intégral	54
	F Règle de d'Alembert	54
	G Formule de Stirling	55
	H Comparaison, développement asymptotique	55
	I Convergence absolue	55
	J Séries alternées	55
	K Produit de Cauchy	56
	L Exercices concours	57

Index

absolue convergence, [25](#)

convergence absolue, [25](#)

critère de Leibniz, [31](#)

critère spécial des séries alternées, [31](#)

développement décimal, [28](#)

divergence grossière, [10](#)

reste d'une série convergente, [7](#)

règle de d'Alembert, [21](#)

série, [7](#)

série convergente, [7](#)

série de Riemann, [14](#)

série divergente, [7](#)

série géométrique, [10](#)

série harmonique, [8](#)

série harmonique alternée, [32](#)

série télescopique, [8](#)

somme partielle, [7](#)

somme télescopique, [11](#)

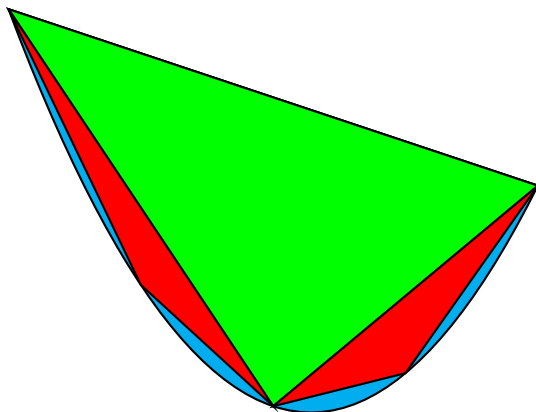
terme général, [7](#)

troncature d'une série, [9](#)

I Introduction.

A Quelques notes historiques.

ARCHIMÈDE et la quadrature de la parabole (première quadrature historique) : l'aire de la portion surfacique de parabole délimitée par une parabole et une corde est égale au $\frac{4}{3}$ de l'aire du triangle inscrit de médiane parallèle à l'axe de la parabole.



Le procédé consiste à itérer la méthode avec les deux cordes. Les deux triangles suivants ont la même surface, égale à $\frac{1}{8}$ de la surface du triangle initial : la largeur est divisé par deux, la flèche par 4, soit une surface divisée par $\frac{1}{8}$, mais pour les deux triangles soit une surface de $\frac{1}{4}$ de la surface précédente. Sa méthode géométrique fait alors apparaître une somme (série) géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

$$S_n = S + \frac{S}{4} + \frac{S}{4^2} + \cdots + \frac{S}{4^n}$$

qui converge (à l'époque, on utilise le principe d'exhaustion¹) vers $S \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}S$.

Citons le paradoxe de ZÉNON d'Achille et de la tortue (sacré copieur ce (La Font)aine) : Achille court deux fois plus vite que la tortue (qui elle ne court pas vraiment). La tortue est devant lui. Mais lorsqu'il avance de la distance qui le sépare de la tortue, elle avance de la moitié, etc. Ainsi la tortue est toujours devant le pauvre Achille, qui n'arrive donc pas à la rattraper.

C'est au dix-neuvième siècle que les séries ont fait l'objet de démonstrations rigoureuses en ce qui concerne la convergence (cours d'analyse algébrique de CAUCHY de 1821). Auparavant, des mathématiciens comme EULER au dix-huitième, utilisait les séries, convergentes ou non. Ceci dit, les calculs formels avec des séries convergente ou non sont à l'origine de la théorie des séries formelles, utilisées en algèbre combinatoire ce qui permet de décrire et d'étudier certaines suites ainsi que les fonctions génératrices.

¹la méthode d'exhaustion consiste en un double raisonnement par l'absurde : on suppose que l'aire est strictement supérieure à A, on aboutit à une contradiction ; on suppose ensuite que l'aire est strictement inférieure à A, on aboutit à une autre contradiction. On en déduit que l'aire est égale à A.

B Programme officiel PCSI

Séries numériques : PCSI

Cette section a pour but de prolonger l'étude des suites et de permettre d'appliquer les techniques d'analyse asymptotique pour étudier les séries numériques. La notion de suite sommable est introduite mais n'appelle aucun développement théorique.

a) Convergence et divergence

Sommes partielles d'une série numérique.
Convergence, divergence, somme.

La série est notée $\sum u_n$.

En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Linéarité de la somme.
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.
Reste d'une série convergente.

Divergence grossière.

Lien suite -série. La suite (u_n) et la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.

Série géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.

Relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

b) Séries à termes positifs ou nuls

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Pour f continue et monotone, encadrement des sommes partielles de la série $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.
Séries de Riemann.

Sur des exemples simples, application à l'étude asymptotique de sommes partielles.

Si (u_n) et (v_n) sont positive et si, pour tout n , $u_n \leq v_n$, alors la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$ et

Adaptation au cas où l'inégalité $u_n \leq v_n$ n'est vérifié qu'à partir d'un certain rang.
Comparaison à une série de Riemann.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Si (u_n) et (v_n) sont positives et si $u_n \sim v_n$, alors la convergence de $\sum u_n$ est équivalente à celle de $\sum v_n$.

c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes, suites sommables

Convergence absolue de la série numérique $\sum u_n$, encore appelée sommabilité de la suite (u_n) .

Notation $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$.

Le critère de Cauchy et la notion de semi-convergence sont hors programme.

Une série numérique absolument convergente est convergente.

Somme d'une suite sommable.

Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = \mathcal{O}(V_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

C Programme officiel PC

Cette section a pour objectif de consolider et d'élargir les acquis de première année sur les séries, notamment la convergence absolue, en vue de l'étude des probabilités discrètes et des séries de fonctions.

L'étude de la semi-convergence n'est pas un objectif du programme.

Technique de comparaison série-intégrale.

Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas d'une fonction monotone.

Formule de Stirling : équivalent de $n!$.

La démonstration n'est pas exigible.

Règle de d'Alembert.

Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.

La transformation d'Abel est hors programme.

Produit de Cauchy de deux séries absolument convergente.

La démonstration n'est pas exigible.

II Généralités sur les séries numériques

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou des complexes.

A Définition d'une série numérique

DÉFINITION 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$, on appelle **série de terme général** u_n l'objet formel noté $\sum(u_n)$.

Pour tout entier N , on pose $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$; S_N est appelé la **somme partielle** d'ordre N de la série numérique $\sum(u_n)$. La suite (S_n) est appelée la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

Pour tout n , u_n est appelé le n -ième terme général de la série $\sum(u_n)$, u_0 étant dans ce cas le 0 ième.

On définit les mêmes notions pour une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.



On trouve dans les livres toutes sorte de définition d'une série :

– Ellipse PC-PC* : la suite des sommes partielles (S_n) est appelée la série $\sum u_n$ associée à la suite (u_n) .

– Bréal précis analyse PC : la série de terme général u_n est le couple $(u_n), (S_n)$.

Ainsi dire qu'une série est bornée en pensant à (S_n) peut-être très ambiguë, voir incohérent pour certains. Il faut mieux parler du caractère bornée de la suite des sommes partielles (S_n) .

DÉFINITION 2. On dit que la série $\sum u_n$ **converge** si la suite $(S_N)_{N \geq 0}$ des sommes partielles converge vers une limite S . On note alors

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$$

Dans le cas contraire, on dit que la série **diverge**.

Dans le cas où la série converge, on note

$$R_N = S - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$$

appelé **reste** d'ordre N .

La proposition suivante est triviale mais il ne faut pas l'oublier !

PROPOSITION 1. La suite des restes (R_n) d'une série numérique convergente est une suite qui converge vers 0.

Ainsi lorsque l'on sait qu'une série $\sum(u_n)$ est convergente, on peut affirmer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ tend

vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ ou même encore que $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$ tend vers 0.

Exemples :

1. Notion de *série télescopique* : on considère la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$. On rappelle que, lorsque cela à un sens

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

et ainsi la série converge et on a $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i(i+1)} = 1$.

La suite des restes (R_n) , c'est à dire la suite

$$\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} \right)_n$$

converge vers 0. On a précisément

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n}$$

2. La *série harmonique* : on considère la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

On a déjà $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} > 0$, et ainsi la suite (S_n) est strictement croissante. Ainsi soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$.

On verra plus loin une méthode générale utilisant une comparaison à une intégrale. On peut aussi procéder aussi ici de la façon suivante : On a

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$$

On a donc $S_{2n} \geq S_n + \frac{1}{2}$ et donc (S_n) ne peut converger, comme elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$. La divergence est en fait assez lente. Pour une machine², avec une précision limitée, la série peut être perçue comme convergente ! Ceci dit, ce n'est pas la seule série ayant cette particularité.

²l'esprit humain reste irremplaçable, pour l'instant ...

B Combinaison linéaire de séries.

PROPOSITION 2. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes de sommes S et R respectivement. Alors pour tout scalaire λ et μ , la série $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, de somme T , et on a $T = \lambda S + \mu R$ soit encore

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

On dit aussi que la somme d'une série est une opération linéaire.

PROPOSITION 3. Soit (u_n) une suite complexe. On considère les suites (a_n) et (b_n) partie réelle et imaginaire de (u_n) . Alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent et on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Preuve :

En effet, on considère les suites des sommes partielles (U_n) , (A_n) et (B_n) des séries $\sum u_n$, $\sum a_n$ et $\sum b_n$. On a

$$U_n = A_n + iB_n$$

d'où les résultats puisque l'on sait qu'une suite complexe converge si et seulement si la suite des parties réelles et la suite des parties imaginaires convergent, avec la limite de la suite complexe égale au complexe de partie réelle la limite de suite des parties réelles et partie imaginaire la limite de la suite des parties imaginaires. ★

C Troncature

Des définitions, on montre facilement :

PROPOSITION 4. La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ et la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ (troncature) sont de même nature.

Deux séries qui diffèrent d'un nombre fini de termes sont de même nature.

D Condition nécessaire de convergence. Divergence grossière.

PROPOSITION 5. Si une série converge, alors son terme général tend vers 0.

Preuve :

Avec les notations usuelles, la suite des sommes partielles (S_n) converge vers S . On a si $n \geq 1$

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

et ainsi $a_n = S_n - S_{n-1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ par opération. ★

Lorsque le terme général d'une série ne tend pas vers zéro, par contraposée, la série diverge.

DÉFINITION 3. Lorsque le terme général d'une série ne tend pas vers zéro, on dit que la **série diverge grossièrement**.

Par exemple, $\sum (-1)^n$ diverge grossièrement.

 La réciproque est fausse. Par exemple, la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente bien que le terme général tende vers 0 (il ne tend pas « assez vite » vers 0).

Autre exemple : on considère la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Le terme général tend vers 0. Cependant comme

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

on a par télescopage

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{N+1} - 1$$

et ainsi la série diverge.

E Cas de la série géométrique.

PROPOSITION 6. Soit $q \in \mathbb{C}$. Alors la **série géométrique** $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad R_N = \frac{q^{N+1}}{1-q}$$

On a aussi

$$S_N = \sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

Preuve :

On rappelle que

$$(1-q)(1+q+\dots+q^N) = 1 - q^{N+1}$$

et ainsi si $q \neq 1$,

$$S_N = \sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

Or la suite (q^{N+1}) converge si et seulement si $|q| < 1$; et dans ce cas elle converge vers 0. Donc la série converge si et seulement si $|q| < 1$ et on a dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = S$$

On a aussi

$$R_N = S - S_N = \frac{1}{1-q} - \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \frac{q^{N+1}}{1 - q}$$

★

Par exemple

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{2}{3}$$

F Somme télescopique.

Généralisons l'exemple de *somme télescopique* (beaucoup d'exercices se résolvent par des sommes télescopiques cachées) :

PROPOSITION 7. *Une suite (U_n) converge si et seulement si la série $\sum (U_{n+1} - U_n)$ converge.*

Preuve :

Par télescopage, on a :

$$\sum_{n=0}^N (U_{n+1} - U_n) = U_{N+1} - U_0$$

d'où le résultat. Dans le cas de convergence, si ℓ est la limite de (U_n) , S la somme de la série, alors $S = \ell - U_0$. ★

On peut alors facilement créer artificiellement des exercices : prenons par exemple $u_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$, avec $n \geq 2$. Alors

$$v_n = u_{n+1} - u_n = \ln \frac{n+1}{n} - \ln \frac{n}{n-1} = \ln \frac{n^2-1}{n^2} = \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ peut donc être vue comme une série télescopique.

III Séries à termes positifs.

A Somme d'une série à termes positifs.

Commençons par la remarque suivante : soit $\sum (a_n)$ une série à termes positifs, alors puisque pour tout n , $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$, la suite (S_n) est croissante, et ainsi soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$ et plus précisément, d'après ce que l'on a vu pour les suites croissantes :

PROPOSITION 8. Soit $\sum (a_n)$ une série à termes positifs. La suite (S_n) est croissante. La série converge si et seulement si (S_n) est majorée et on a alors

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

☞ En pratique, on peut même se contenter d'une information plus faible encore. Si par exemple, on sait que $(S_{\varphi(n)})$ extraite de (S_n) est majorée, alors forcément la série $\sum (a_n)$ converge puisque sinon, (S_n) divergerait vers $+\infty$ et toute suite extraite aussi.

B Encadrement de $\sum f(n)$ et applications

1) Encadrement

PROPOSITION 9. Soit f une fonction positive continue (par morceaux) définie sur $[1, +\infty[$ décroissante . Alors

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq f(1) + \dots + f(n) \leq f(1) + \int_1^n f(x)dx$$

et si f définie sur $[0, +\infty[$

$$\int_0^{n+1} f(x)dx \leq f(0) + f(1) + \dots + f(n) \leq f(0) + \int_0^n f(x)dx$$

et aussi

$$f(0) + \int_1^{n+1} f(x)dx \leq f(0) + f(1) + \dots + f(n) \leq f(0) + \int_0^n f(x)dx$$

Soit f une fonction continue (par morceaux) positive définie sur $[0, +\infty[$ croissante . Alors

$$\int_0^n f(x)dx \leq f(1) + \dots + f(n) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx$$

et si f définie sur $[0, +\infty[$

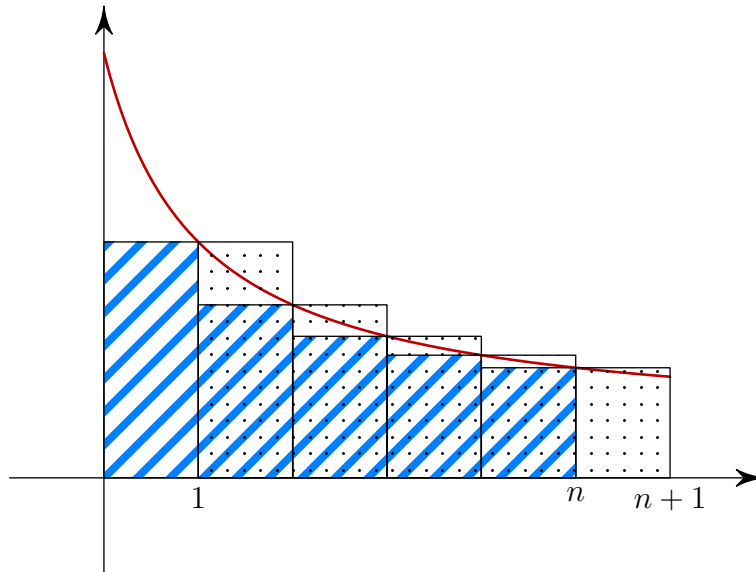
$$f(0) + \int_0^n f(x)dx \leq f(0) + f(1) + \dots + f(n) \leq \int_0^{n+1} f(x)dx$$

et aussi

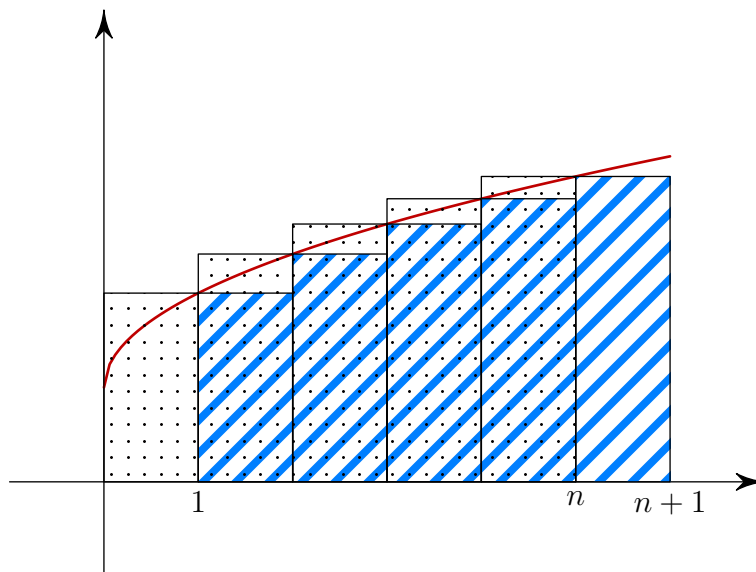
$$f(0) + \int_0^n f(x)dx \leq f(0) + f(1) + \dots + f(n) \leq f(0) + \int_1^{n+1} f(x)dx$$

Preuve :

Deux dessins suffisent à justifier les encadrements : la partie hachurée et la partie en pointillés ont la même surface $f(1) + \dots + f(n)$



et pour une fonction croissante :



On peut aussi faire le raisonnement suivant : si f est décroissante, alors pour $t \in [k, k+1]$, $f(t) \leq f(k)$ d'où

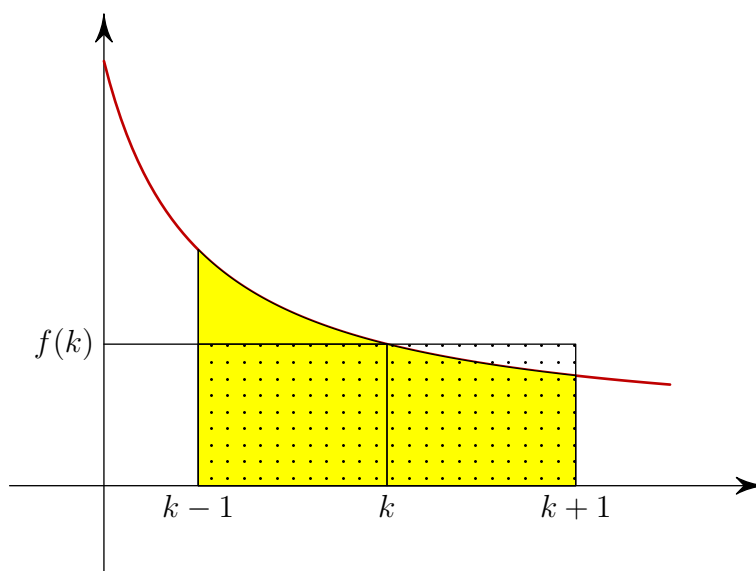
$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$

et pour $t \in [k-1, k]$, $f(k) \leq f(t)$ et ainsi

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

et ainsi finalement

$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$



d'où en sommant pour $k = 1, \dots, n$,

$$\int_1^{n+1} f(t)dt \leq f(1) + \dots + f(n) \leq \int_0^n f(t)dt$$

pour une fonction sur $[0, +\infty[$.

★

COROLLAIRE 1. Soit f une fonction décroissante, continue positive. Alors $\sum f(n)$ est convergente si et seulement si la suite (I_n) définie par $I_n = \int_1^n f(t)dt$ est convergente.

Preuve :

Comme f positive, les deux suites $(f(1) + \dots + f(n))$ et $(\int_1^n f(t)dt)$ sont croissantes et donc elles convergent si et seulement si elles sont majorées. L'encadrement ci-dessus permet alors de conclure : si $\sum f(n)$ est convergente, la suite des sommes partielles $(f(1) + \dots + f(n))$ converge, donc est majorée et ainsi la suite $(\int_1^{n+1} f(t)dt)$ est majorée et donc $(\int_1^n f(t)dt)$ aussi, et ainsi la suite $(\int_1^n f(t)dt)$ est convergente.

Réciproquement, si $(\int_1^n f(t)dt)$ converge, elle est majorée, $(\int_0^n f(t)dt)$ aussi et ainsi $(f(1) + \dots + f(n))$ aussi ; comme cette dernière est croissante, elle converge et donc la série $\sum f(n)$ est convergente. ★

Ce théorème sera exprimé d'une autre façon dans le chapitre d'intégration, avec la notion d'intégrales généralisés, pour des fonctions continues par morceaux.

2) Exemples des séries de Riemann.

PROPOSITION 10. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ dite **série de Riemann** est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve :

Si $\alpha \leq 0$, la série diverge grossièrement. $S = +\infty$ (série à termes positifs).

On suppose désormais $\alpha > 0$. La série étant à termes positifs, nous allons étudier si (S_n) est majorée. On a par encadrement (fonction décroissante)

$$\int_1^{N+1} \frac{1}{x^\alpha} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \int_1^N \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Si $\alpha = 1$, on obtient

$$\ln(N+1) \leq S_N \leq 1 + \ln N$$

et ainsi (S_N) diverge vers $+\infty$. Donc la série diverge vers $+\infty$. Plus précisément, comme

$$\ln(N+1) = \ln N \left(1 + \frac{1}{N}\right) = \ln N + \ln \left(1 + \frac{1}{N}\right) = \ln N + \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right) \sim \ln N$$

on déduit que

$$\boxed{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sim \ln N}$$

Si $\alpha \neq 1$,

$$\left[-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\right]_1^{N+1} \leq S_N \leq 1 + \left[-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\right]_1^N$$

Pour $0 < \alpha < 1$, on obtient que

$$\frac{1}{1-\alpha} ((N+1)^{1-\alpha} - 1) \leq S_N$$

et ainsi (S_N) diverge vers $+\infty$. Plus précisément, en utilisant

$$\int_1^N \frac{1}{x^\alpha} dx + \frac{1}{N^\alpha} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \int_1^N \frac{1}{x^\alpha} dx$$

on a

$$\frac{1}{1-\alpha} (N^{1-\alpha} - 1) + \frac{1}{N^\alpha} \leq S_N \leq 1 + \frac{1}{1-\alpha} ((N+1)^{1-\alpha} - 1)$$

puis en divisant par $\frac{1}{1-\alpha} N^{1-\alpha}$

$$1 - \frac{1}{N^{1-\alpha}} + \frac{1-\alpha}{N} \leq S_N \leq 1 - \frac{1}{N^{1-\alpha}}$$

et ainsi³

³la formule est valable en fait pour tout $\alpha < 1$. Dans le cas où $\alpha \leq 0$, la fonction f est croissante, et les inégalités sont renversées, ce qui ne change rien au final. D'ailleurs, on rappelle que l'on a de manière classique

$$1 + 2 + \dots + N = \sum_{n=1}^N n^1 = \frac{N(N+1)}{2} \sim \frac{N^2}{2}$$

et

$$1^2 + 2^2 + \dots + N^2 = \sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \sim \frac{N^3}{3}$$

ainsi que

$$1^3 + 2^3 + \dots + N^3 = \sum_{n=1}^N n^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} \sim \frac{N^4}{4}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{(1-\alpha)} N^{1-\alpha}}$$

Pour $\alpha > 1$, on obtient

$$S_N \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1} \left(1 - \frac{1}{N^{\alpha-1}} \right) \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$$

et ainsi (S_n) majorée (et croissante) donc converge. On a aussi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$$

On peut alors déterminer un équivalent de R_N qui tend vers 0. On a

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

On a par comparaison intégrale

$$\int_{N+1}^{M+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_N^M \frac{1}{x^\alpha} dx$$

mais comme techniquement $N + 1$ va un peu nous embêter, on écrit plutôt pour la minoration

$$\int_N^{M+1} \frac{1}{x^\alpha} dx - \frac{1}{N^\alpha} \leq \sum_{n=N}^M \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{N^\alpha} = \sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n^\alpha}$$

et ainsi

$$\int_N^{M+1} \frac{1}{x^\alpha} dx - \frac{1}{N^\alpha} \leq \sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_N^M \frac{1}{x^\alpha} dx$$

d'où

$$\frac{1}{1-\alpha} ((M+1)^{1-\alpha} - N^{1-\alpha}) - \frac{1}{N^\alpha} \leq \sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha} (M^{1-\alpha} - N^{1-\alpha})$$

on fait tendre M vers $+\infty$

$$\frac{1}{\alpha - 1} N^{1-\alpha} - \frac{1}{N^\alpha} \leq R_N \leq \frac{1}{\alpha - 1} N^{1-\alpha}$$

d'où

$$\boxed{R_N \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{N^{\alpha-1}}}$$

★

3) Application à l'étude asymptotique de sommes partielles.

On vient de voir que par exemple

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n$$

Donnons d'autres exemples (et un contre exemple) d'utilisation de l'encadrement par des intégrales :

• On considère la série $\sum_{n \geq 0} \sqrt{n}$. Elle diverge grossièrement, à termes positifs. Ainsi (S_n) diverge vers $+\infty$. On souhaite déterminer un équivalent de (S_n) . Comme la fonction racine est croissante, on a

$$f(0) + \int_0^n f(x)dx \leq f(0) + \dots + f(n) \leq \int_0^{n+1} f(x)dx$$

soit encore

$$\int_0^n \sqrt{x}dx \leq S_n \leq \int_0^{n+1} \sqrt{x}dx$$

d'où

$$\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^n \leq S_n \leq \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{n+1}$$

c'est à dire

$$\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} \leq S_n \leq \frac{2}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}$$

On en déduit que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n\sqrt{n}$.

• On considère la série $\sum_{n \geq 1} \ln n$. Elle diverge grossièrement, à termes positifs. Ainsi (S_n) diverge vers $+\infty$. On souhaite déterminer un équivalent de (S_n) . Comme la fonction logarithme népérien est croissante, on a (attention à ne pas intégrer à partir de 0 dans l'intégrale de gauche)

$$f(1) + \int_1^n f(x)dx \leq f(1) + \dots + f(n) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx$$

soit encore

$$\int_1^n \ln x dx \leq S_n \leq \int_1^{n+1} \ln x dx$$

d'où

$$[x \ln x - x]_1^n \leq S_n \leq [x \ln x - x]_1^{n+1}$$

c'est à dire

$$n \ln n - n + 1 \leq S_n \leq (n+1) \ln(n+1) - (n+1) + 1 = (n+1) \ln(n+1) - n$$

On a $n \ln n - n + 1 \sim n \ln n$ et $(n+1) \ln(n+1) - n \sim (n+1) \ln(n+1) \sim n \ln(n+1)$ et si on ne le sait pas encore

$$\ln(n+1) = \ln n \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln n + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln n + \frac{1}{n} + o_0 \left(\frac{1}{n} \right) \sim \ln n$$

et ainsi finalement,

$$\sum_{k=1}^n \ln k \underset{+\infty}{\sim} n \ln n$$

• On considère la série $\sum_{n \geq 0} e^n$. Elle diverge grossièrement, à termes positifs. Ainsi (S_n) diverge vers $+\infty$. On souhaite déterminer un équivalent de (S_n) . Comme la fonction exponentielle est croissante, on a

$$f(0) + \int_0^n f(x)dx \leq f(0) + \dots + f(n) \leq \int_0^{n+1} f(x)dx$$

soit encore

$$\int_0^n e^x dx \leq S_n \leq \int_0^{n+1} e^x dx$$

d'où

$$[e^x]_0^n \leq S_n \leq [e^x]_0^{n+1}$$

c'est à dire

$$e^n \sim e^n - 1 \leq S_n \leq e^{n+1} - 1 \sim e^{n+1}$$

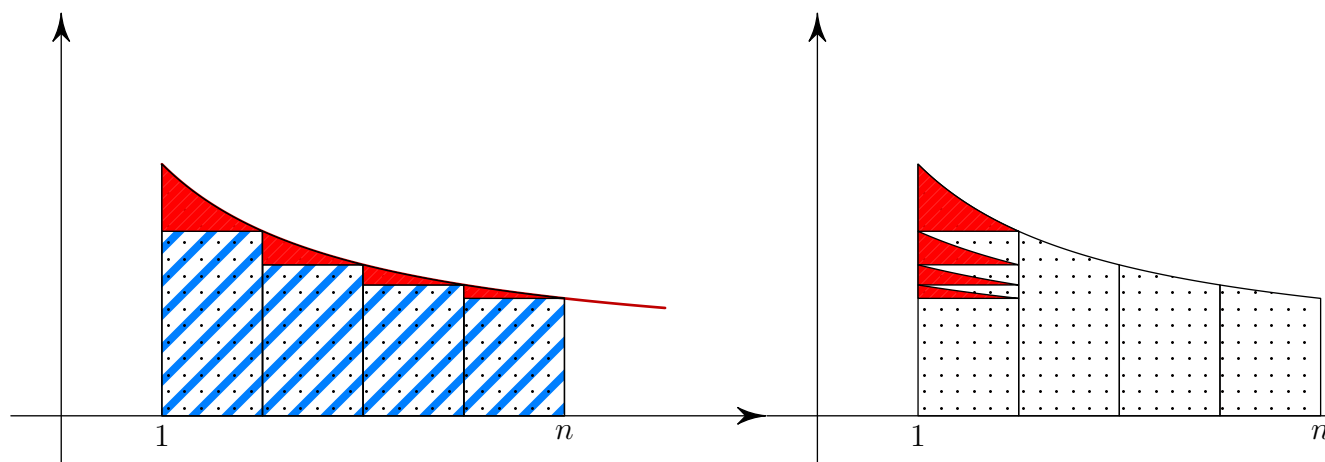
Mais e^n et e^{n+1} ne sont pas équivalents. La méthode ne fonctionne pas ici ; la cause : l'exponentielle croît trop rapidement.

Oui, mais je veux trouver un équivalent, moi, na ! Ben en fait, c'est une série géométrique, on a tout simplement

$$S_n = 1 + e + e^2 + \dots + e^n = \frac{1 - e^{n+1}}{1 - e} \sim \frac{e^{n+1}}{e - 1}$$

4) Erreurs cumulées

La remarque géométrique suivante, simple, a des conséquences très intéressantes. Lorsque la fonction f est décroissante sur $[1, +\infty[$ par exemple (à adapter selon les cas), pas forcément vers 0, cumulons les écarts entre $f(n)$ et la surface intégrale en les déplaçant géométriquement dans la partie d'abscisse entre 1 et 2 :



On voit que cette accumulation d'écarts est croissante, majorée : on obtient donc une suite croissante majorée, qui converge donc. Formalisons cette observation géométrique : formellement, on écrit :

$$e_n = \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1)$$

et

$$E_n = \sum_{k=1}^{n-1} e_k = \int_1^n f(x)dx - f(2) - \cdots - f(n)$$

On a

$$E_{n+1} - E_n = \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1) \geq 0$$

et ainsi la suite (E_n) est croissante. D'autre part comme

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$$

on a

$$0 \leq e_k \leq f(k) - f(k+1)$$

et en sommant

$$0 \leq E_n \leq f(1) - f(n+1) \leq f(1)$$

Ainsi la suite (E_n) est croissante, majorée. Elle converge vers une limite dépendante de la fonction f .

Par exemple, la constante d'Euler est définie ainsi. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, décroissante sur $[1, +\infty[$. On a ici

$$E_n = \ln n - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n}$$

La suite considérée est plutôt

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = -E_n + 1$$

qui est donc décroissante, bornée avec vu l'étude ci-dessus

$$0 \leq E_n \leq 1$$

et ainsi $0 \leq U_n \leq 1$. La suite (U_n) est minorée, décroissante, et donc elle converge vers une constante notée γ appelée constante d'Euler-Macheroni. On a avec nos encadrements $0 \leq \gamma \leq 1$.

Cet encadrement peut-être amélioré en remarquant que le cumul des écarts E_n vérifie

$$0 \leq E_n \leq \int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln 2$$

et ainsi $1 - \ln 2 \leq \gamma \leq 1$.

C Comparaison

1) Comparaison par inégalité

PROPOSITION 11. Soit (u_n) et (v_n) deux suites positives. Si pour tout n , $u_n \leq v_n$ (ou à partir d'un certain rang) alors la convergence de $\sum v_n$ implique la convergence de $\sum u_n$ et la divergence de $\sum u_n$ implique la divergence de $\sum v_n$. Dans le cas de convergence (majoration à partir du rang 0), on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Les séries géométriques et les séries de Riemann sont des séries de références. On pourra toujours tenter de comparer la série que l'on étudie à ces séries particulières. D'autre part, si la comparaison n'est vraie qu'à partir d'un certain rang, la proposition reste valable, à part l'inégalité entre les somme bien évidemment que l'on peut adapter.

Par exemple, si une série $\sum a_n$ à termes positifs est convergente, alors la suite (a_n) converge vers 0, à partir d'un certain rang, $0 \leq a_n \leq 1$ et ainsi $0 \leq a_n^2 \leq a_n$. On peut alors en déduire que la série $\sum(a_n^2)$ est convergente.

2) Comparaison à une série géométrique

Voici déjà la version élémentaire, qui n'est pas spécialement au programme :

PROPOSITION 12 (Comparaison géométrique). *Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries numériques à termes strictement positifs. On suppose qu'à partir d'un certain rang*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

- 1) Si $\sum b_n$ converge, il en est de même de $\sum a_n$.
- 2) Si $\sum a_n$ diverge, il en est de même de $\sum b_n$.

Preuve :

On suppose qu'à partir du rang N_0 on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Alors si $n \geq N_0$

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \times \dots \times \frac{a_{N_0+1}}{a_{N_0}} \times a_{N_0}$$

et ainsi

$$a_n \leq \frac{b_n}{b_{n-1}} \times \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \times \dots \times \frac{b_{N_0+1}}{b_{N_0}} \times a_{N_0} \leq b_n \times \frac{a_{N_0}}{b_{N_0}}$$

d'où les résultats par comparaison. ★

PROPOSITION 13 (règle de d'Alembert v1). *Soit (u_n) une suite strictement positive.*

- 1) Si on a à partir d'un certain rang

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1$$

alors $\sum u_n$ converge.

- 2) Si on a à partir d'un certain rang

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq q > 1$$

alors $\sum u_n$ diverge (grossièrement).

Preuve :

• On suppose que $q < 1$. Prenons $\ell < q < 1$. Il existe un rang N_0 à partir duquel

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q = \frac{q^{n+1}}{q^n}$$

et ainsi par le théorème précédent, sachant que la série géométrique $\sum q^n$ est convergente, la série $\sum a_n$ converge.

- On suppose que $\ell > 1$. Prenons $\ell > q > 1$. Il existe un rang N_0 à partir duquel

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq q = \frac{q^{n+1}}{q^n}$$

et ainsi par comparaison géométrique, la série diverge (grossièrement). ★

En général, on utilisera la *regle de d'Alembert* avec la version suivante :

THÉORÈME 14 (règle de d'Alembert). Soit (u_n) une suite strictement positive de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$$

- si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
- si $\ell > 1$, la série diverge (grossièrement).
- si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure en général. Mais astuce tout de même importante dans ce cas : si $\ell = 1^+$, on peut affirmer que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang et ainsi $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Preuve :

Si $\ell < 1$, alors par définition de la limite, il existe un rang à partir duquel $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\ell+1}{2} = q < 1$ et on applique le théorème précédent.

Si $\ell > 1$, alors par définition de la limite, il existe un rang à partir duquel $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{\ell+1}{2} = q > 1$ et on applique le théorème précédent aussi. ★

Rédigeons aussi une preuve directe, qui condense les deux preuves ci-dessus :

Preuve :

- On suppose que $\ell < 1$. Prenons $\ell < q < 1$. Il existe un rang N_0 à partir duquel

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$$

Alors si $n \geq N_0$,

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \cdots \times \frac{u_{N_0+1}}{u_{N_0}} \times u_{N_0} \leq q^{n-N_0} \cdot u_{N_0} = \frac{u_{N_0}}{q^{N_0}} q^n$$

et ainsi par comparaison à une série géométrique, la série $\sum u_n$ est convergente.

- On suppose que $\ell > 1$. Prenons $\ell > q > 1$. Il existe un rang N_0 à partir duquel

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq q$$

Alors si $n \geq N_0$,

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \cdots \times \frac{u_{N_0+1}}{u_{N_0}} \times u_{N_0} \geq q^{n-N_0} \cdot u_{N_0} = \frac{u_{N_0}}{q^{N_0}} q^n$$

et ainsi par comparaison à une série géométrique, la série $\sum u_n$ est divergente grossièrement.

★

• Lorsque $\ell = 1$, tout peut se passer :

– $u_n = \frac{1}{n}$: la série diverge.

– $u_n = \frac{1}{n^2}$: la série converge.

• Par exemple, déterminons la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ avec $u_n = \frac{n!}{n^n}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-n \ln(1 + \frac{1}{n})} = e^{-1 + o(1)} \end{aligned}$$

et ainsi $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers $\frac{1}{e} < 1$ et ainsi la série converge.

• Autre exemple usuel : la série exponentielle : pour x réel, on considère la série

$$\sum \frac{x^n}{n!}$$

Pour x non nul, comme

$$\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1}$$

tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente. Pour $x = 0$, la convergence est acquise aussi.



Attention, si on a seulement la condition

$$\forall n, \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

on ne peut pas conclure. En effet, pour la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$$

et la série diverge.

• Pour finir, un exemple plus sophistiqué : on considère la série

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n+p}{n} x^n$$

où p est un entier et x un réel positif.

► Pour $x = 0$, la série converge (de somme 1). ► Sinon, en notant a_n le terme général de la série, on a par la relation $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{n+1+p}{n+1} x^{n+1}}{\binom{n+p}{n} x^n} = \frac{n+1+p}{n+1} x$$

qui converge vers x . Ainsi la série converge pour $x \in [0, 1[$, et diverge pour $x > 1$.

► Pour $x = 1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1+p}{n+1}$, converge vers 1 mais surtout ici (d'où l'importance de la remarque)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+p+1}{n+1} > 1$$

et ainsi la suite (a_n) est croissante, elle ne peut converger vers 0, et ainsi la série diverge grossièrement.

3) Comparaison à une série de Riemann.

Par exemple, étudions la nature de la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{\ln^3 n}{n^2}$$

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^3 n}{n^2} \times n^{\frac{3}{2}} = 0$ et ainsi on a à partir d'un certain rang $\frac{\ln^3 n}{n^2} \times n^{\frac{3}{2}} \leq 1$ soit encore

$$\frac{\ln^3 n}{n^2} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

et ainsi par comparaison, la série converge.

Cette technique permet de montrer ⁴ :

PROPOSITION 15. Soit (u_n) une suite positive. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n n^\alpha = 0$ avec $\alpha > 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

☞ On a partir d'un certain rang $u_n n^\alpha \geq 1$, et ainsi

$$u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

d'où la convergence de la série $\sum u_n$ par comparaison.

PROPOSITION 16. Soit (u_n) une suite positive. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n n^\alpha = +\infty$ avec $\alpha \leq 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Preuve :

On a partir d'un certain rang $u_n n^\alpha \geq 1$, et ainsi

$$u_n \geq \frac{1}{n^\alpha}$$

d'où la divergence de la série $\sum u_n$ par comparaison.

Ici encore, si on a seulement $(n^\alpha u_n)$ minorée par un réel strictement positif, à partir d'un certain rang, la conclusion reste la même. ★

Exemple des séries de Bertrand : on considère la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On note u_n le terme général de la série.

• si $\alpha > 1$: on choisit a de sorte que $1 < a < \alpha$. Alors

$$n^a u_n = n^{a-\alpha} (\ln n)^{-\beta} \longrightarrow 0$$

⁴le résultat tient encore si l'on a seulement $(n^\alpha u_n)$ bornée

puisque $a - \alpha < 0$. Ainsi la série converge.

- si $\alpha < 1$:

$$nu_n = n^{1-\alpha}(\ln n)^{-\beta} \longrightarrow +\infty$$

puisque $1 - \alpha > 0$. Ainsi la série diverge.

- si $\alpha = 1$, on procède par comparaison intégrale : on a la série numérique de Bertrand $\sum \frac{1}{n \ln^\beta n}$ de même nature que la suite croissante $\left(\int_2^n \frac{1}{x \ln^\beta x} dx \right)$. Or si $\beta \neq 1$,

$$\int_2^n \frac{1}{x \ln^\beta x} dx = \left[\frac{1}{1-\beta} \ln^{1-\beta} x \right]_2^n$$

et ainsi la série converge si et seulement si $\beta > 1$.

Et pour finir, si $\beta = 1$,

$$\int_2^n \frac{1}{x \ln x} dx = [\ln \ln x]_2^n$$

et ainsi la série diverge. Conclusion : la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

D Utilisation de l'équivalence.

PROPOSITION 17. Soit (u_n) et (v_n) deux suites positives (à partir d'un certain rang). Si $u_n \sim v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Preuve :

On suppose que $\sum v_n$ converge. Puisque $u_n \sim v_n$, on a $u_n - v_n$ négligeable devant v_n , et ainsi il existe un rang à partir duquel $|u_n - v_n| \leq v_n$, et ainsi $u_n - v_n \leq v_n$ puis $u_n \leq 2v_n$ à partir d'un certain rang. On en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente.

En inversant les rôles de u_n et v_n , si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ aussi.

Autre méthode (si (u_n) et (v_n) ne s'annule pas) : si $\sum v_n$ converge. Puisque $u_n \sim v_n$, on a $\frac{u_n}{v_n}$ qui tend vers 1, donc bornée par B . Ainsi $u_n \leq Bv_n$. Donc si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ aussi.

Si u_n diverge, en utilisant $u_n \leq 2v_n$ à partir d'un certain rang ou $u_n \leq Bv_n$, on déduit que $\sum v_n$ diverge aussi.

En inversant les rôles de u_n et v_n , si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ aussi. ★

Par exemple, étudions la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$. On a

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim \frac{1}{n}$$

Nous sommes bien dans le cadre de séries à termes positifs, ainsi la série diverge.



Attention à ne pas utiliser ce résultat lorsque la série n'est pas à termes de signe constant (à partir d'un certain rang). Par exemple, si on considère la série

$$\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$$

On a

$$\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

et on verra (critère spécial des séries alternées) que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente. Cependant,

$$\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \right)$$

ce qui permet d'en déduire que la série est en fait divergente (somme de trois séries dont une diverge et deux convergent).

IV Séries absolument convergentes.

A Définition de l'absolue convergence.

DÉFINITION 4. On dit qu'une série $\sum u_n$ **converge absolument** ou est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ converge.

Par exemple, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ ne converge pas absolument.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(i)^n}{n^2}$ converge absolument ; la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n^2}$ converge absolument.

B Théorème

THÉORÈME 18. Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente et on a

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Preuve :

Soit $\sum u_n$ une série réelle, absolument convergente. On rappelle que

$$u_n^+ = \max(u_n, 0) \quad u_n^- = \max(-u_n, 0) \quad u_n = u_n^+ - u_n^- \quad |u_n| = u_n^+ + u_n^-$$

On a donc $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$ et ainsi par comparaison, les séries à termes positifs $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont toutes les deux convergentes. Par soustraction, on en déduit que $\sum u_n$ converge aussi, et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^-$$

et comme

$$\left| \sum_{n=0}^N u_n \right| = \left| \sum_{n=0}^N u_n^+ - u_n^- \right| \leq \sum_{n=0}^N u_n^+ + u_n^- = \sum_{n=0}^N |u_n|$$

on en déduit en passant à la limite que

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ + u_n^- = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Soit maintenant $\sum u_n$ une série à termes complexes, absolument convergente. On écrit $u_n = a_n + ib_n$ avec a_n et b_n réels. On a $|a_n| \leq |u_n|$ et $|b_n| \leq |u_n|$ et ainsi par comparaison, les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont des séries de réels absolument convergentes, donc convergentes. Ainsi par combinaison linéaire, $\sum u_n$ est convergente aussi et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

et comme

$$\left| \sum_{n=0}^N u_n \right| = \left| \sum_{n=0}^N (a_n + ib_n) \right| \leq \sum_{n=0}^N |a_n + ib_n| = \sum_{n=0}^N |u_n|$$

on en déduit que

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

★

Par exemple, si $\alpha > 1$,

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right| = \frac{1}{n^\alpha}$$

et ainsi $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente.

C Comparaison par domination

PROPOSITION 19. Soit $\sum u_n$ une série et $\sum v_n$ à termes positifs. On suppose que (u_n) est dominée par (v_n) et que $\sum v_n$ converge. Alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Preuve :

(u_n) est dominée par (v_n) donc il existe une constante B telle que (à partir d'un certain rang si (v_n) s'annule ; si (v_n) ne s'annule pas, $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée)

$$|u_n| \leq Bv_n$$

et ainsi par comparaison, la série $\sum |u_n|$ est convergente, donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente. ★

Par exemple, si $n \geq 1$,

$$\left| \frac{i^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

et donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{i^n}{n^2}$ est convergente. De la même façon, si $\alpha > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente.

COROLLAIRE 2. *Toute combinaison linéaire de deux séries absolument convergentes est absolument convergente.*

Preuve :

En effet, si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, a et b des scalaires, alors

$$|au_n + bv_n| \leq |a||u_n| + |b||v_n|$$

Comme les séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ sont convergentes, la série $\sum |a||u_n| + |b||v_n|$ aussi et ainsi la série $\sum au_n + bv_n$ est absolument convergente. ★

V Applications.

A Développement décimal d'un nombre réel

PROPOSITION 20. Si (a_n) est une suite bornée, la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{10^n}$$

est absolument convergente.

Preuve :

En effet, si (a_n) est bornée par B , on a

$$\left| \frac{a_n}{10^n} \right| \leq \frac{B}{10^n}$$

d'où la convergence absolue par comparaison avec une suite géométrique convergente. ★

THÉORÈME 21. Soit x un réel positif. Alors il existe une unique suite (a_n) d'entiers naturels avec

$$a_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

et (a_n) non stationnaire à 9 telle que

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

Lorsque $x \in [0, 1[$, on a $a_0 = 0$.

DÉFINITION 5. On note $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$ et on parle de **développement décimal illimité propre** de x .

Attention, si $a_p \neq 9$, on a $a_0, a_1 \dots a_p 9999 \dots = a_0, a_1 a_2 \dots (a_p + 1)$. En effet

$$0,99\dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

et ainsi

$$0,0\dots 099\dots = 10^{-p} 0,999\dots = 10^{-p}$$

d'où le résultat.

B Caractérisation des nombres décimaux par leur développement décimal

DÉFINITION 6. On dit qu'un réel x est un nombre décimal si on peut écrire

$$x = \frac{m}{10^n}$$

avec $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ ou de manière équivalente, de la forme $\frac{n}{2^a 5^b}$ avec n entier relatif, a et b entiers.

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

THÉORÈME 22. *Soit x un réel. x est décimal si et seulement si son développement décimal est nul à partir d'un certain rang.*

Preuve :

Si $x = a_0, a_1 \cdots a_n$, alors $x = \frac{a_0 \times 10^n + (a_1 \cdots a_n)}{10^n}$ et ainsi x décimal.

Réciproquement, si x décimal, $x = \frac{m}{10^n}$, $m = 10^n a_0 + r$ avec $0 \leq r < 10^n$, puis $r = (a_1 \cdots a_n)$ (n chiffres au plus)

$$x = a_0, a_1 \cdots a_n$$

★

THÉORÈME 23. *Soit x un réel. x est décimal si et seulement si son développement décimal est nul à partir d'un certain rang.*

Par exemple,

$$\frac{1}{10} = 0.100 \cdots$$

C Caractérisation des nombres rationnels par leur développement décimal

THÉORÈME 24. *Soit x un réel. x est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.*

Par exemple,

$$\frac{1}{3} = 0.333 \cdots \quad \frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$$

et

$$\frac{13}{11} = 1.\overline{18} \quad \frac{123}{17} = 7.\overline{2352941176470588}$$

Preuve :

Si $x = a_0, a_1 \cdots a_p \overline{a_{p+1} \cdots a_{p+q}}$, alors

$$x = a_0, a_1 \cdots a_p + (a_{p+1} \cdots a_{p+q}) \times \left(\frac{1}{10^{p+q}} + \frac{1}{10^{p+2q}} + \cdots \right)$$

soit encore

$$x = \underbrace{a_0, a_1 \cdots a_p}_{\in \mathbb{D}} + (a_{p+1} \cdots a_{p+q}) \times \frac{1}{10^{p+q}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10^q}} \in \mathbb{Q}$$

Réciproquement, prenons x un rationnel, non nul, positif. On écrit $x = \frac{p}{q}$ forme irréductible.

$$y_n = 10^n (x - d_{n-1}) = 10^n \frac{p}{q} - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor = \frac{\alpha_n}{d}$$

avec α_n entier et

$$x - d_{n-1} < \frac{1}{10^{n-1}}$$

et ainsi

$$0 \leq 10^n (x - d_{n-1}) = \frac{\alpha_n}{q} < 10$$

soit $0 \leq \alpha_n \leq 9q$. La suite (α_n) est bornée. Comme elle a une infinité de termes, entiers, entre 0 et $9q$, il existe m et m' , $m' > m$ de sorte que $\alpha_m = \alpha_{m'}$. On pose $t = m' - m$. On a alors $y_m = y_{m'}$.

Relions a_n et y_n : comme $a_n = 10^n(d_n - d_{n-1})$,

$$a_n \leq 10^n(x - d_{n-1}) < 10^n(e_n - d_{n-1}) = 10^n(d_n - d_{n-1}) + 1$$

et ainsi $a_n = \lfloor 10^n(x - d_{n-1}) \rfloor = \lfloor y_n \rfloor$.

Et maintenant, on établit une relation de récurrence

$$y_{n+1} = 10^{n+1}(x - d_n) = 10 \times 10^n \left(x - d_{n-1} - \frac{a_n}{10^n} \right) = 10y_n - 10a_n = 10(y_n - a_n)$$

soit encore

$$y_{n+1} = 10(y_n - \lfloor y_n \rfloor)$$

On montre alors par récurrence que si $n \geq m$, $y_{n+t} = y_n$. Cela est vrai pour $n = m$; si $y_{n+t} = y_n$, alors

$$\begin{aligned} y_{(n+1)+t} &= y_{n+t+1} = 10(y_{n+t} - \lfloor y_{n+t} \rfloor) \\ &= 10(y_n - \lfloor y_n \rfloor) = y_{n+1} \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

On en déduit alors que si $n \geq m$, $a_{n+t} = a_n$, ce qui prouve la périodicité à partir d'un certain rang de la suite des chiffres.

En pratique, (α_n) représente la suite des restes dans la division de p par q : lorsque l'on retombe sur un reste déjà obtenu, la périodicité apparaît : prenons par exemple la fraction $\frac{12}{13}$: on pose la division :

$$\begin{array}{r|l} 12 & 13 \\ \hline 120 & 0,923076|923076 \\ 30 & \\ 40 & \\ 10 & \\ 100 & \\ 90 & \\ 120 & \end{array}$$

Regardons notre suite α_n sur laquelle repose la périodicité dans notre preuve. On fait un tableau :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	9	2	3	0	7	6	9
d_n	0	0,9	0,92	0,923	0,9230	0,92307	0,923076	0,9230769
y_n	$\frac{13}{13}$	$\frac{120}{13}$	$\frac{30}{13}$	$\frac{40}{13}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{100}{13}$	$\frac{90}{13}$	$\frac{120}{13}$
α_n	12	120	30	40	10	100	90	120



VI Critère spécial des séries alternées

Il s'agit d'une règle spéciale due à Leibniz ⁵, que l'on appelle souvent le *critère spécial des séries alternées* ou encore *critère de Leibniz*.

A Séries alternées

DÉFINITION 7. On dit qu'une série de réel $\sum a_n$ est alternée si la suite $((-1)^n a_n)$ est de signe constant. En d'autres termes, une série est alternée si ces termes de rang pair sont tous positifs et ces termes de rang impair tous négatifs ou inversement.

Quelques exemples de séries alternées

$$\sum (-1)^n \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

B Le théorème

THÉORÈME 25. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série alternée telle que la suite $(|a_n|)$ converge vers 0 en décroissant.

Alors la série $\sum a_n$ est convergente.

De plus pour tout n , $|R_n| \leq |a_{n+1}|$ avec R_n du signe de a_{n+1} , c'est à dire que R_n est du signe du premier terme de la somme qui le définit et inférieur en valeur absolue.

D'autre part, la somme est comprise entre deux sommes partielles consécutives quelconques.

Preuve :

Il s'agit en fait d'une application assez directe du théorème des suites adjacentes. On considère la suite des sommes partielles (S_N) . Montrons que (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont adjacentes. On se place dans la situation où les termes d'ordre pair sont positifs et les termes d'ordre impair négatifs. Nous avons :

- $S_{2N+1} - S_{2N} = a_{2N+1} = -|a_{2N+1}|$ qui tend vers 0
- La suite (S_{2N}) est décroissante :

$$S_{2N+2} - S_{2N} = a_{2N+2} + a_{2N+1} = |a_{2N+2}| - |a_{2N+1}| \leq 0$$

- La suite (S_{2N+1}) est croissante :

$$S_{2N+3} - S_{2N+1} = a_{2N+3} + a_{2N+2} = -|a_{2N+3}| + |a_{2N+2}| \geq 0$$

Ainsi les suites extraites des termes d'ordre pair et des termes d'ordre impair de (S_N) sont adjacentes : elles convergent donc vers la même limite, et ainsi (S_N) converge vers cette limite.

Donc la série $\sum a_n$ converge.

On a aussi pour tout n , $S_{2N+1} \leq S \leq S_{2N}$ et ainsi $S_{2N+1} - S \leq 0 \leq S_{2N} - S$ soit encore $-R_{2N+1} \leq 0 \leq -R_{2N}$ que l'on écrit

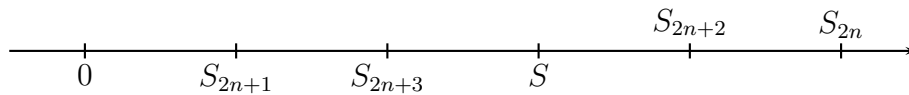
$$R_{2N} \leq 0 \leq R_{2N+1}$$

⁵Gottfried Wilhelm Leibniz, philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand, 1646 – 1716 ; lettre à Hermann, 1705 et à John Bernoulli 1714

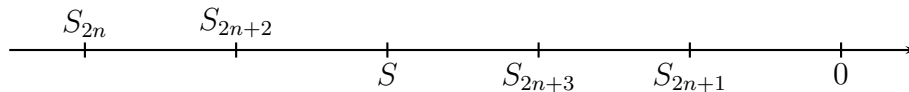
et donc R_N est du signe de a_{N+1} , c'est à dire du premier terme de sa somme $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n$.

D'autre part, $0 \geq R_{2N} = S - S_{2N} \geq S_{2N+1} - S_{2N} = -|a_{2N+1}|$ et $0 \leq R_{2N+1} = S - S_{2N+1} \leq S_{2N} - S_{2N+1} = |a_{2N+1}| \leq |a_{2N+2}|$ et ainsi pour tout n , $|R_n| \leq |a_{n+1}|$. ★

- La majoration est très utile pour des évaluations numériques.
- Parfois, on applique le critère à partir d'un certain rang.
- Quelques représentations utiles en dimension 1 : dans le cas où on commence par un terme positif :



et dans le cas où le premier terme est négatif



C Exemples

- On considère la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\sigma}$ dite de Dirichlet, pour σ réel.
 - Lorsque $\sigma > 1$, la série est absolument convergente, la série des valeurs absolues étant une série de Riemann.
 - Pour $0 < \sigma \leq 1$, la série ne converge pas absolument. Et c'est dans ce cas que le critère spécial des séries alternées va intervenir : la suite $(\frac{1}{n^\sigma})$ est bien décroissante vers zéro, et ainsi la série converge (on dit qu'elle est semi-convergente : série convergente mais non absolument convergente).
- Pour $\sigma = 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est appelée *série harmonique alternée*.
- Pour $\sigma \leq 0$, le terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n^\sigma}$ ne tend pas vers 0, la série diverge grossièrement.

Ainsi, on peut définir la fonction

$$\eta(\sigma) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\sigma}$$

sur $]0, +\infty[$.

- Attention à ne pas tomber dans les pièges grossiers : on demande par exemple d'étudier la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$$

La série est alternée, le terme $a_n \frac{1}{n+(-1)^n}$ tend vers 0. Mais il ne décroît pas et donc on ne peut pas appliquer le critère. En effet

$$a_{2n+1} - a_{2n} = \frac{1}{2n+1-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} > 0$$

L'étude de cette série se fait alors de manière élémentaire, par un développement asymptotique : on écrit

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}} \\ &= \frac{(-1)^n}{n} \times \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

et ainsi la série converge comme somme de séries convergentes.

- On pose $L = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$. Déterminer n de sorte que $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^3}$ soit une valeur approchée de L à 10^{-3} près.

On cherche n de sorte que $|R_n| \leq 10^{-3}$. Or on sait que $|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)^3}$. On a

$$\frac{1}{(n+1)^3} \leq 10^{-3} \iff \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{10} \iff n \geq 9$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^9 \frac{(-1)^{k-1}}{k^3}$$

est une valeur approchée à 10^{-3} près (par défaut) de L . On trouve

$$\sum_{k=1}^9 \frac{(-1)^{k-1}}{k^3} = \frac{14436577189}{16003008000} \approx 0.90211$$

- La condition de décroissance n'est pas toujours facile à prouver, et même parfois ... fausse. Dans certains cas, un développement asymptotique permet de se ramener à la situation idéale pour le premier terme, les autres termes ne posant pas de problème (convergence absolue).

VII Formule de Stirling

A Intégrales de Wallis

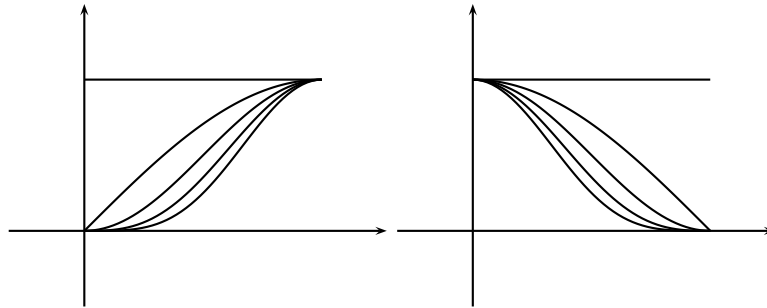
On définit pour tout entier naturel n

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$$

Le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ permet d'obtenir

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u du$$

résultat qui se visualise clairement par le tracé des différentes courbes $t \mapsto \sin^n t$ et $u \mapsto \cos^n u$:



- La suite (W_n) est positive et décroissante. En effet on a pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$0 \leq \sin t \leq 1$$

et ainsi $0 \leq \sin^{n+1} t \leq \sin^n t$ et en intégrant on obtient $0 \leq W_{n+1} \leq W_n$.

- Soit $n \geq 2$, on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin^{n-1} t dt = \underbrace{[-\cos t \sin^{n-1} t]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \cos t \cos t \sin^{n-2} t dt \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^{n-2} t dt = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \sin^{n-2} t dt \\ &= (n-1)(W_{n-2} - W_n) \end{aligned}$$

et ainsi $nW_n = (n-1)W_{n-2}$ soit encore

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n}$$

- Comme la suite (W_n) est décroissante strictement positive, on a

$$0 \leq W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$$

puis en divisant par W_n

$$0 \leq \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$$

soit encore compte tenu de la relation de récurrence

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$$

ce qui permet d'en déduire que $W_{n+1} \sim W_n$.

• Comme $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, on a en multipliant par W_{n+1}

$$(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+1)W_nW_{n+1}$$

et ainsi la suite $((n+1)W_nW_{n+1})$ est une suite constante, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)W_nW_{n+1} = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}$$

Alors

$$\frac{\pi}{2} \sim (n+1)W_{n+1}W_n \sim nW_n^2$$

ce qui permet d'en déduire que

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Ainsi la suite (W_n) converge vers 0.

B La formule

PROPOSITION 26. On a⁶

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

Preuve :

On pose (cela suppose de déjà conjecturer la forme d'un équivalent de $n!$)

$$z_n = \frac{n!}{n^n} e^{-n} \sqrt{n}$$

Alors

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \frac{e^{-n}}{e^{-(n+1)}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-(n+\frac{1}{2})} e$$

et on note

$$\ln \frac{z_{n+1}}{z_n} = \ln z_{n+1} - \ln z_n = v_n$$

On sait que $\sum v_n$ converge si et seulement si $\ln z_n$ converge si et seulement si z_n converge vers $\ell \neq 0$. On a

⁶Historiquement, Abraham de Moivre (mathématicien français 1667–1754) a obtenu

$$n! \sim C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

et James Stirling (mathématicien Écossais 1692–1770) a complété en déterminant la valeur de C . De Moivre utilise cette formule pour décrire la loi normale comme une approximation de la loi binomiale.

$$\begin{aligned}
v_n &= -\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 \\
&= -\left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) + 1 \\
&= -1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) + 1 \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

et ainsi la série de terme général v_n converge. On en déduit que

$$\frac{n!}{n^n} e^{-n} \sqrt{n}$$

admet une limite K non nulle. Ainsi

$$n! \sim K \sqrt{n} n^n e^{-n}$$

Pour préciser la valeur de K , on utilise les intégrales de Wallis. On utilise alors $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et que $W_{2n} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2}$. Ainsi

$$\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \sim W_{2n} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \sim \frac{\pi}{2} \times \frac{K \sqrt{2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{K^2 2^{2n} n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{1}{K} \frac{\pi \sqrt{2}}{2 \sqrt{n}}$$

ce qui permet d'obtenir $\frac{\pi}{K\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ soit finalement $K = \sqrt{2\pi}$. ★

1) Une application

Déterminons un équivalent de $\binom{2n}{n}$. On a

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{\sqrt{2\pi(2n)} (2n)^{2n} e^{-2n}}{2\pi n \cdot n^{2n} e^{-2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 2^{2n}$$

⚠ On fera attention à ne pas utiliser la formule de Stirling lorsque cela n'est pas vraiment utile ou même lorsqu'elle complique les choses ! Par exemple, pour déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{n!}$ on peut :

- procéder par majoration : si $n \geq 2$, on a :

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots 1} \leq \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$$

et ainsi la série converge.

- utiliser la règle de d'Alembert (pourquoi pas, même si elle n'est pas utile dans ce cas) :

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et ainsi la série converge.

- Mais ne surtout pas utiliser la formule de Stirling !

C Qualité de l'approximation

n	$n!$	$\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$	erreur relative
1	1	0.92	0.07
2	2	1.91	0.04
3	6	5.83	0.027
4	24	23.50	0.0205
5	120	118.01	0.0165
6	720	710.07	0.0137
7	5040	4980.39	0.0118
8	40320	39902.39	0.0103
9	362880	359536.87	0.0092
10	3628800	3598695.61	0.0083
11	39916800	39615625.05	0.0075
12	479001600	475687486.47	0.00691
13	6227020800	6187239475.19	0.00638
14	87178291200	86661001740.6	0.00593
15	1307674368000	$13004307222 \times 10^{12}$	0.0055

```
import pylab as py

def fact(n):
    f = 1
    for i in range(2,n+1):
        f *= i
    return f

def approx(n):
    return py.sqrt(2*py.pi*n)*(n*py.exp(-1))**n

N = 15
for i in range(1,N+1):
    a,b=fact(i),approx(i)
    print(i,a,b,abs(a-b)/a)
```

Il existe une correction de cette formule donnant une approximation encore meilleure

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n} \left(1 + \frac{1}{12n}\right)$$

n	$n!$	$\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}(1 + 1/12n)$	erreur relative
1	1	0.998981759637	0.001
2	2	1.99896286613	0.0005
3	6	5.99832652444	0.00027
4	24	23.9958871148	0.00017
5	120	119.98615409	0.00011
6	720	719.940381651	8.2×10^{-5}
7	5040	5039.68625818	6.2×10^{-5}
8	40320	40318.0454053	4.8×10^{-5}
9	362880	362865.917961	3.8×10^{-5}
10	3628800	3628684.7489	3.17×10^{-5}
11	39916800	39915743.4222	2.6×10^{-5}
12	479001600	478990871.796	2.2×10^{-5}
13	6227020800	6226901266.7	1.9×10^{-5}
14	87178291200	87176841036.7	1.6×10^{-5}
15	1307674368000	$1.30765533732 \times 10^{12}$	1.4×10^{-5}

VIII Produit de Cauchy de deux séries

A Motivations

La définition du produit de Cauchy de deux séries apparaît naturellement lorsque l'on effectue le produit de deux polynômes

$$P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i \quad Q = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j X^j$$

qui fait intervenir les coefficients de PQ

$$PQ = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) X^n$$

avec donc pour tout n

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

et $PQ = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n X^n$, les sommes étant toutes finies.

B Définition

DÉFINITION 8. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes complexes. On appelle produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série $\sum w_n$ définie par

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k$$

C Exemples

• les séries exponentielles : on considère pour x et y des complexes les séries (on ne s'occupe pas ici de convergence)

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{y^n}{n!}$$

Le produit de Cauchy est $\sum c_n$ avec

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k} \times \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

La série produit de Cauchy est donc

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

• Un autre exemple de séries qui se prêtent bien au produit de Cauchy, les séries entières. Un chapitre leur sera dédié. On considère deux séries de la forme

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad \sum_{n \geq 0} b_n z^n$$

Le produit de Cauchy de ces deux séries est la série de terme général

$$\sum_{k=0}^n a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n$$

et ainsi la série produit de Cauchy est

$$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n$$

qui est donc aussi une série entière.

D Propriété

THÉORÈME 27. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes complexes absolument convergentes. Alors le produit de Cauchy $\sum w_n$ de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est aussi absolument convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

Preuve :

La preuve n'est pas exigible au programme de PC.

On peut déjà prouver de manière générale la convergence absolue de $\sum w_n$:

$$|w_n| \leq \sum_{p+q=n} |u_p| \cdot |v_q|$$

et ainsi

$$\sum_{n=0}^N |w_n| \leq \sum_{n=0}^N \sum_{p+q=n} |u_p| \cdot |v_q|$$

et ainsi

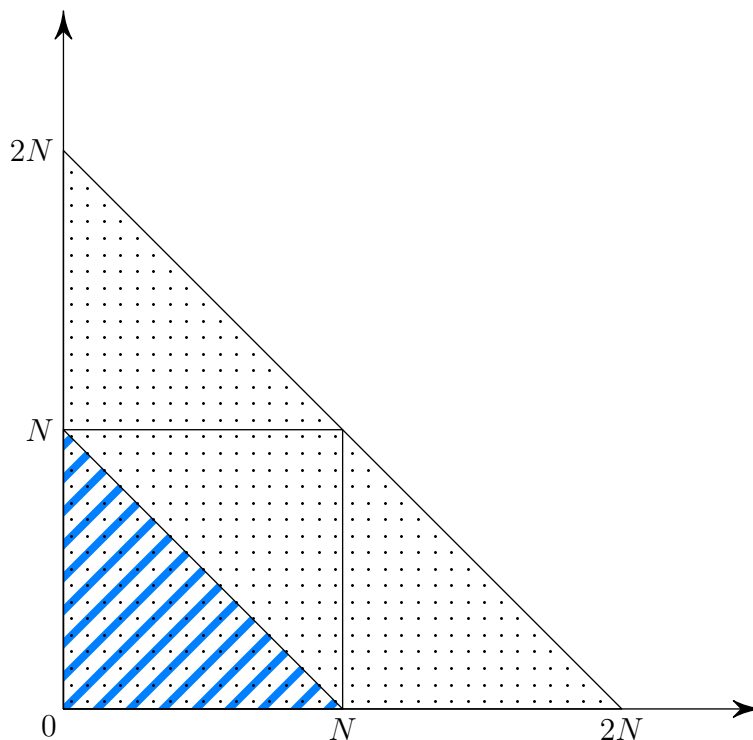
$$\sum_{n=0}^N |w_n| \leq \sum_{p=0}^N |u_p| \times \sum_{q=0}^N |v_q|$$

et donc

$$\sum_{n=0}^N |w_n| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} |u_p| \times \sum_{q=0}^{+\infty} |v_q|$$

Ainsi la série à termes positifs $\sum |w_n|$ est convergente, et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |w_n| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} |u_p| \times \sum_{q=0}^{+\infty} |v_q|$$



- Lorsque les séries sont à termes positifs, comme (voir graphique)

$$\sum_{n=0}^N w_n = \sum_{n=0}^N \sum_{p+q=n} u_p v_q$$

(somme des termes d'indices correspondants à la partie hachurée) on a déjà

$$\sum_{n=0}^N w_n \leq \left(\sum_{n=0}^N u_n \right) \left(\sum_{n=0}^N v_n \right)$$

et ainsi la série $\sum w_n$ converge (série à termes positifs, majorée) ; de plus

$$\sum_{n=0}^{2N} w_n = \sum_{n=0}^{2N} \sum_{p+q=n} u_p v_q$$

(somme des termes d'indices correspondants à la partie en pointillée) on a

$$\sum_{n=0}^N w_n \leq \left(\sum_{n=0}^N u_n \right) \left(\sum_{n=0}^N v_n \right) \leq \sum_{n=0}^{2N} w_n$$

et donc par le théorème des gendarmes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

Ainsi la formule est prouvée pour des séries à termes positifs.

- Si les séries sont réelles, on décompose $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $v_n = v_n^+ - v_n^-$ et ainsi

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n (u_k^+ - u_k^-) (v_{n-k}^+ - v_{n-k}^-) \\ &= \sum_{k=0}^n u_k^+ v_{n-k}^+ - \sum_{k=0}^n u_k^+ v_{n-k}^- - \sum_{k=0}^n u_k^- v_{n-k}^+ + \sum_{k=0}^n u_k^- v_{n-k}^- \end{aligned}$$

et on est ramené au cas précédent avec 4 séries à termes positifs convergentes, et ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} w_n &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^+ \right) - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^- \right) - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^- \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^+ \right) \\
&\quad + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^- \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^- \right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^- \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)
\end{aligned}$$

- Et pour finir, si les séries sont à termes complexes, on note $u'_n = |u_n|$ et $v'_n = |v_n|$, alors

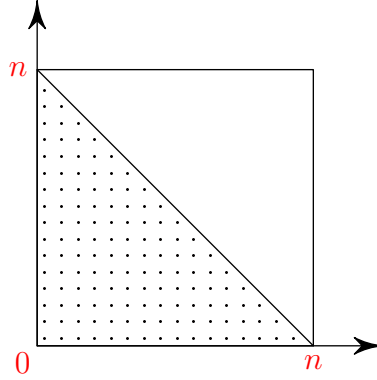
$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

et

$$|w_n| \leq \sum_{k=0}^n |u_k| \cdot |v_{n-k}| = \sum_{k=0}^n u'_k \cdot v'_{n-k} = w'_n$$

Comme $\sum w'_n$ est convergente, $\sum w_n$ est absolument convergente (le début de la démonstration s'avère donc inutile). On écrit

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^n u_k \right) \times \left(\sum_{k=0}^n v_k \right) - \left(\sum_{k=0}^n w_k \right) &= \sum_{p,q \leq n} u_p v_q - \sum_{p+q \leq n} u_p v_q \\
&= \sum_{\substack{p+q > n \\ p,q \leq n}} u_p v_q = A
\end{aligned}$$



On a

$$|A| \leq \sum_{\substack{p+q > n \\ p,q \leq n}} |u_p| \cdot |v_q| \leq \left(\sum_{k=0}^n u'_k \right) \times \left(\sum_{k=0}^n v'_k \right) - \left(\sum_{k=0}^n w'_k \right) = B$$

et comme B tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini (cas des séries à termes positifs), A aussi. On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$



• Les séries exponentielles $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ avec $x \in \mathbb{C}$ sont toutes absolument convergentes : en effet, pour $x = 0$, la suite des somme partielles est la suite constante égale à 1 et si $x \neq 0$, on a

$$\frac{\left| \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et ainsi d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{|x|^n}{n!}$ est convergente.

Ainsi si x et y sont deux complexes, le produit de Cauchy des séries $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{y^n}{n!}$ est absolument convergent et on a vu les calculs effectués précédemment

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

E Contre exemple

Que se passe-t-il si les deux séries sont convergentes mais non absolument convergente ? Donnons un exemple où le produit de Cauchy diverge. On considère la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

et on forme son produit de Cauchy avec elle même. On note $\sum_{n \geq 0} c_n$ le produit de Cauchy. On a

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \times \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

Encadrons c_n : pour $0 \leq k \leq n$, $1 \leq k+1 \leq n+1$ et $1 \leq n-k+1 \leq n+1$ et ainsi

$$(k+1)(n+1-k) \leq (n+1)^2$$

d'où

$$|c_n| \geq 1$$

et ainsi (c_n) ne converge pas vers 0 ce qui entraîne que $\sum c_n$ diverge grossièrement.

F Pour aller plus loin encore

Totalement hors programme, mais le résultat permet de compléter le contre-exemple ci-dessus.

THÉORÈME 28 (de Mertens). Soit $\sum u_n$ absolument convergente et $\sum u_n$ convergente. Alors le produit de Cauchy $\sum w_n$ est convergent et on a encore

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

Preuve :

La preuve est basée sur la transformation d'Abel, en principe hors programme. Notons

$$V_n = \sum_{k=0}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} V \quad \alpha_n = V - V_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N w_n &= \sum_{p+q \leq N} u_p v_q = \sum_{p=0}^N u_p \sum_{q=0}^{N-p} v_q \\ &= \sum_{p=0}^N u_p V_{N-p} = \sum_{p=0}^N u_p (V - \alpha_{N-p}) \\ &= V \sum_{p=0}^N u_p - \sum_{p=0}^N u_p \alpha_{N-p} \end{aligned}$$

Comme la suite (α_n) converge, notons $A = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|$ et notons $K = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Soit $\varepsilon > 0$, puisque la série $\sum w_n$ est absolument convergente, il existe un rang N_1 à partir duquel ($N \geq N_1$)

$$\sum_{p=N}^{+\infty} |u_p| \leq \frac{\varepsilon}{2(A+1)}$$

Comme la suite (α_n) converge vers 0, il existe un rang N_2 à partir duquel $|\alpha_n| \leq \frac{\varepsilon}{2(K+1)}$.

Pour $N \geq N_1 + N_2$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p=0}^N u_p \alpha_{N-p} \right| &= \left| \sum_{p=0}^{N_1} u_p \alpha_{N-p} + \sum_{p=N_1+1}^{N_2} u_p \alpha_{N-p} \right| \\ &\leq \sum_{p=0}^{N_1} |u_p| \cdot |\alpha_{N-p}| + \sum_{p=N_1+1}^{N_2} |u_p| \cdot |\alpha_{N-p}| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(K+1)} \sum_{p=0}^{N_1} |u_p| + A \sum_{p=N_1+1}^N |u_p| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

★

IX Compléments hors programme

A Règle de Cauchy

THÉORÈME 29. Soit $\sum(a_n)$ une série à termes positifs. On suppose que

$$\sqrt[n]{a_n} = a_n^{\frac{1}{n}} \longrightarrow \ell$$

– si $\ell < 1$, la série $\sum(a_n)$ converge.
– si $\ell > 1$, la série $\sum(a_n)$ diverge. – si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure. Cependant, si $\ell = 1^+$, $\sum(a_n)$ diverge grossièrement.

Preuve :

- si $\ell < 1$, en prenant $\ell < q < 1$, on a à partir d'un certain rang $a_n^{\frac{1}{n}} \leq q$ et ainsi $a_n \leq q^n$. On conclut par comparaison à une série géométrique convergente.
- si $\ell > 1$, en prenant $\ell > q > 1$, on a à partir d'un certain rang $a_n^{\frac{1}{n}} \geq q$ et ainsi $a_n \geq q^n$. On conclut par comparaison à une série géométrique divergente.
- si $\ell = 1^+$, à partir d'un certain rang, $a_n^{\frac{1}{n}} \geq 1$ et ainsi $a_n \geq 1$ d'où la divergence grossière de la série $\sum(a_n)$.
- on considère la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ qui diverge ou converge selon les valeurs de α . On a

$$\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} = n^{-\frac{\alpha}{n}} = e^{-\frac{\alpha}{n} \ln n} \longrightarrow e^0 = 1$$

★

La règle de Cauchy est un peu plus fine que celle de d'Alembert. Il y a des cas où Cauchy permet de conclure et pas d'Alembert. De manière générale, si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \ell$, on a aussi $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \ell$, la réciproque étant fautive. En effet, si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \ell \neq 1$,

$$\ln a_{n+1} - \ln a_n \longrightarrow \ln \ell$$

Par Césaro (si une suite converge, la suite des moyennes des n premiers termes converge aussi vers la même limite), $\frac{\ln a_n}{n} \longrightarrow \ln \ell$, et en prenant l'exponentielle $a_n^{\frac{1}{n}} \longrightarrow \ell$.

Un contre exemple ; on considère la série $\sum 2^{(-1)^n - n}$. On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{(-1)^{n+1} - n - 1}}{2^{(-1)^n - n}} = 2^{(-1)^{n+1} - (-1)^n - 1} = b_n$$

avec $b_{2n} = \frac{1}{8}$ et $b_{2n+1} = 2$ et ainsi la rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ n'a pas de limite, tandis que

$$\sqrt[n]{a_n} = 2^{\frac{(-1)^n}{n} - 1} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

Donnons quelques exemples où la règle de Cauchy est bien adaptée :

- On étudie la convergence de la série numérique $\sum \frac{n^\alpha}{2^n}$. On a

$$\sqrt[n]{\frac{n^\alpha}{2^n}} = \frac{n^{\frac{\alpha}{n}}}{2} = \frac{e^{\frac{\alpha}{n} \ln n}}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$$

et ainsi la série est convergente. La règle de d'Alembert s'applique aussi facilement :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^\alpha \longrightarrow \frac{1}{2}$$

- On étudie la série $\sum(a_n)$ avec $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. On a de manière classique

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$$

et ainsi la série est convergente.

- Dans le cas où $a_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$, on a

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n} = \frac{e^{\frac{(\ln n)^2}{n}}}{\ln n} \longrightarrow 0$$

et ainsi la série est convergente.

B Règle d'Abel

La règle d'Abel permet d'accéder à la convergence de séries qui ne sont pas absolument convergente, mais qui converge tout de même (on parle de semi-convergence).

THÉORÈME 30. Soit $\sum(a_n)$ une série à termes positifs avec (a_n) décroissante vers 0 et $\sum(b_n)$ une série de sorte que sa suite des sommes partielles (B_n) soit bornée. Alors la série numérique $\sum(a_n b_n)$ est convergente.

Preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on calcule la somme partielle de la série $\sum(a_n b_n)$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=1}^n a_k B_{k-1} \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n + a_1 B_0 \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que la suite des sommes partielles (S_n) converge. On a déjà

$$|a_n B_n| \leq B |a_n|$$

et ainsi $(a_n B_n)$ tend vers 0.

Le terme $a_0 b_0 + a_1 B_0$ est constant. De plus comme la suite (B_n) est bornée par B et que (a_n) est positive décroissante, on obtient

$$|(a_k - a_{k+1}) B_k| \leq B |a_k - a_{k+1}| = B(a_k - a_{k+1})$$

or par télescopage, et par le fait que (a_n) converge (vers 0), la série $\sum(a_n - a_{n+1})$ converge, et ainsi la série $\sum(a_n - a_{n+1})B_n$ est absolument convergente, donc convergente et donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1})B_k$$

admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$. Finalement, (S_n) est convergente, ce qui prouve que la série $\sum(a_nb_n)$ est convergente. ★

L'exemple usuel est la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ avec $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$. On considère que $a_n = \frac{1}{n}$ et que $b_n = e^{in\theta}$ avec ici

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=1}^n (e^{i\theta})^k = e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{i\theta} e^{in\frac{\theta}{2}} \sin n\frac{\theta}{2}}{e^{i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

et ainsi

$$|B_n| = \left| \frac{\sin n\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{\theta}{2}|}$$

et donc la suite (B_n) est bornée. Ainsi, d'après le critère d'Abel, la série est convergente.

C Règle de Raabe-Duhamel

Cette règle permet de préciser la règle de d'Alembert, avec toutefois encore une zone d'ombre restante.

THÉORÈME 31. Soit $\sum(a_n)$ une série à termes strictement positifs. On suppose que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

- si $\alpha < 1$, la série $\sum(a_n)$ est divergente.
- si $\alpha > 1$, la série $\sum(a_n)$ est convergente.
- si $\alpha = 1$, on ne peut pas conclure.

Preuve :

On pose $b_n = \frac{1}{n^\beta}$. Alors

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\beta} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et ainsi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\beta - \alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

– si $\alpha < 1$, on choisit $\alpha < \beta < 1$, alors $\beta - \alpha > 0$, et donc à partir d'un certain rang N_0

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{b_n} > 0$$

et ainsi

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_{N_0+1}}{a_{N_0}} a_{N_0} \geq \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdots \frac{b_{N_0+1}}{b_{N_0}} a_{N_0} = b_n \frac{a_{N_0}}{b_{N_0}}$$

et ainsi par comparaison, la série $\sum a_n$ diverge.

– si $\alpha > 1$, on choisit $\alpha > \beta > 1$, alors $\beta - \alpha < 0$, et donc à partir d'un certain rang N_0

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{b_n} < 0$$

et ainsi

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_{N_0+1}}{a_{N_0}} a_{N_0} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdots \frac{b_{N_0+1}}{b_{N_0}} a_{N_0} = b_n \frac{a_{N_0}}{b_{N_0}}$$

et ainsi par comparaison, la série $\sum a_n$ converge. ★

Par exemple, pour une série de Riemann, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-\alpha} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On retrouve les résultats connus ; ici le cas $\alpha = 1$ donne une divergence.

Autre exemple, pour une série de Bertrand générale $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha} \times \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \right)^{-\beta} \\ &= \left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} \right)^{-\beta} \\ &= \left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{-\beta} \\ &= 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Pour $\alpha > 1$ et $\alpha < 1$, on retrouve les résultats des séries de Bertrand.

Pour $\alpha = 1$, en prenant $\beta = 2$, on obtient un cas de convergence.

D Introduction au produit infini

Voici peut-être le premier produit infini de l'histoire des mathématiques (formule de Viète (1593)) :

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots = \frac{\pi}{2}$$

Soit (a_n) une suite de nombres non nuls (mais pourquoi donc non nuls ?), on pose

$$P_n = \prod_{k=0}^n a_k$$

appelé produit partiel du produit formel $\prod(a_n)$.

Lorsque la suite (P_n) admet une limite P non nulle, on dit que le produit formel $\prod_{n \geq 0} (a_n)$ converge et on a

$$\prod_{n=0}^{+\infty} a_n = P$$

Dans le cas contraire, on dit que le produit diverge.

Dans le cas où le produit formel $\prod (a_n)$ converge, on a

$$a_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{P_n} \longrightarrow 1$$

Ainsi la condition (a_n) tend vers 1 est une condition nécessaire à la convergence du produit. Elle n'est pas suffisante (voir un exemple plus loin).

On se place donc désormais dans le cas où (a_n) est une suite de réels strictement positifs qui converge vers 1 et on écrit $a_n = 1 + u_n$, avec (u_n) qui tend vers 0, mais attention, les termes u_n ne sont pas forcément positifs. On a

$$\ln P_n = \sum_{k=0}^n \ln a_k = \sum_{k=0}^n \ln(1 + u_k)$$

• Si la suite (u_n) est à termes positifs (c'est à dire (a_n) est à termes supérieurs à 1), alors comme (u_n) converge vers 0,

$$\ln(1 + u_n) \sim u_n > 0$$

et ainsi $\sum (u_n)$ et $(\ln P_n)$ sont de même nature.

Dans le cas de convergence, la limite de $\ln(P_n)$ est strictement positive, ce qui conduit à l'existence d'une limite pour la suite (P_n) strictement supérieure à 1 et donc la produit converge.

Dans le cas de divergence, (P_n) tend vers $+\infty$ et le produit diverge.

Par exemple, produit

$$\prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$.

• Si la suite (u_n) n'est pas à termes positifs, la situation se complique. On a encore

$$\ln(1 + u_n) \sim u_n$$

et ainsi $|\ln(1 + u_n)| \sim |u_n|$.

Alors si la série $\sum |u_n|$ converge, c'est à dire si $\sum u_n$ converge absolument, on a $\sum \ln(1 + u_n)$ qui converge aussi absolument, et donc converge. Alors $\ln P_n$ admet une limite, et ainsi (P_n) converge vers une limite strictement positive. Ainsi la produit converge. On remarquera que l'hypothèse revient finalement à dire que la produit $\prod (1 + |u_n|)$ est convergent (cas où le terme général est supérieur à 1). On dit dans ce cas que le produit est absolument convergent.

Par exemple, le produit

$$\prod_{n \geq 2} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

avec $\alpha > 0$ est convergent (il est absolument convergent).

Le cas où $0 < \alpha \leq 1$ n'entre dans aucun des cadres précédents.

X Série de Riemann complexe

On considère pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$$

soit en posant $z = \sigma + it$, $(\sigma, t) \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\sigma+it}} = \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-it \ln(n)}}{n^\sigma}$$

- Si $\sigma > 0$, alors comme

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^\sigma}$$

avec $\sigma > 1$, nous obtenons la convergence absolue de la série de Riemann complexe, et donc sa convergence.

- Si $\sigma \leq 0$, nous avons

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^\sigma} = n^{-\sigma}$$

avec $-\sigma \geq 0$ et ainsi le terme général de la série ne tend pas vers 0 : la série de Riemann complexe diverge grossièrement.

- On suppose désormais que $0 < \sigma \leq 1$. On procède par approximation intégrale (méthode en fait utilisée dans le cas réel). On étudie

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^z} - \int_1^N \frac{1}{x^z} dx.$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^z} - \int_1^N \frac{1}{x^z} dx &= \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \left[\frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z} \right] dx \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \int_n^x \frac{z}{u^{z+1}} du dx \end{aligned}$$

Nous avons alors par majoration grossière en module (segment de longueur inférieur à 1) :

$$\left| \int_n^{n+1} \int_n^x \frac{z}{u^{z+1}} du dx \right| \leq |z| \int_n^{n+1} \int_n^x \frac{1}{u^{\sigma+1}} du dx \leq \frac{|z|}{n^{\sigma+1}}$$

Ainsi, comme $\sigma > 0$, la série

$$\sum_{N \geq 2} \int_N^{N+1} \left[\frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z} \right] dx$$

converge absolument, de somme γ_z . On a alors (on ajoute un terme qui tend vers 0)

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^z} = \int_1^N \frac{dx}{x^z} + \gamma_z + o(1)$$

On en déduit que la série de Riemann complexe et la suite d'intégrales

$$\left(\int_1^N \frac{dx}{x^z} \right)$$

sont de même nature. Or si $z \neq 1$ (on connaît déjà bien ce cas),

$$\int_1^N \frac{dx}{x^z} = \int_1^N x^{-z} dx = \left[\frac{1}{1-z} x^{1-z} \right]_1^N = \frac{1}{1-z} N^{1-z} - \frac{1}{1-z}$$

et nous obtenons la convergence si et seulement si $\sigma > 1$.

On a

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^z} - \left[\gamma_z - \frac{1}{1-z} \right] = \frac{1}{1-z} N^{1-z} = \frac{1}{1-z} N^{1-\sigma} e^{-it \ln(N)}$$

– si $0 < \sigma < 1$, nous avons alors les sommes partielles de la série qui s'écartent à l'infini d'un point central d'affixe

$$\gamma_z - \frac{1}{1-z}$$

selon la distance $\frac{1}{|1-z|} N^{1-\sigma}$, en tournant dans le sens inverse du signe de t .

– si $\sigma = 1$ (mais avec $z \neq 1$ c'est à dire $t \neq 0$), nous avons alors les sommes partielles de la série qui s'approchent d'un cercle de centre d'affixe

$$\gamma_z - \frac{1}{1-z}$$

et de rayon $\frac{1}{|1-z|}$, en tournant là encore dans le sens inverse du signe de t .

– si $\sigma > 1$, les sommes partielles de la série qui s'approchent de (la série converge)

$$\gamma_z - \frac{1}{1-z}$$

en tournant là encore dans le sens inverse du signe de t .

XI Exercices SPE PC

A Télésopage

1. Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.
2. Calculer les sommes partielles de la série de terme général $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la convergence de la série ainsi que la somme.
3. Calculer les sommes partielles de la série de terme général $\ln \cos \frac{1}{2^n}$ et en déduire la convergence de la série ainsi que la somme.
4. Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
5. Déterminer la convergence et la somme de la série $\sum_{k \geq 1} \ln \left(1 + \frac{2}{k(k+3)} \right)$.

6. (Centrale 1997) Soit

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$$

Déterminer la somme de la série $\sum u_n$ lorsqu'elle converge.

7. (CCP 1997) Déterminer la somme de la série

$$\sum_{n \geq 1} \operatorname{Arctan} \frac{1}{2n^2}$$

8. Déterminer la somme de la série

$$\sum_{n \geq 0} \operatorname{Arctan} \frac{1}{n^2 + n + 1}$$

On pourra calculer $\operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan} n$.

B Calculs de sommes

9. Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n^2 - 4}$$

converge et déterminer sa somme.

10. Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + 2 + \cdots + n}$$

converge et déterminer sa somme.

C Séries définies à l'aide d'une autre

11. Soit $\sum a_n$ une suite à termes positifs convergente. Montrer que $\sum a_n^2$ est convergente.

12. Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. Montrer que les deux séries

$$\sum \frac{a_n}{n} \quad \sum \frac{a_n}{n+1}$$

sont de même nature.

13. Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs convergente. Montrer que la série $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ est aussi convergente. Réciproque (ENS) ? Et dans le cas où la suite (a_n) est monotone ?

14. Soit $\sum a_n$ une série numérique avec $a_n \geq 0$. Montrer que

$$\sum \frac{a_n}{1 + a_n}$$

est de même nature que $\sum a_n$.

15. (CCP PC 2007) Soit $\sum a_n$ une série convergente à termes strictement positifs. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ converge.

D Comparaison par majoration-minoration

16. Nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}$.
17. Nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} - 1}$.

E Encadrement intégral

18. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ diverge et déterminer un équivalent simple de la somme partielle.
19. Déterminer la partie entière de $\sum_{k=1}^{10^9} k^{-\frac{2}{3}}$.
20. On pose pour tout entier n non nul

$$u_n = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

- 1) Montrer que (S_n) converge vers une limite que l'on note ℓ .
- 2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\frac{1}{(k+1)^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{2}{3} \left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(k+1)^{\frac{3}{2}}} \right) \leq \frac{1}{k^{\frac{5}{2}}}$$

- 3) En déduire un encadrement du reste

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

- 4) En déduire un rang n_0 pour lequel S_{n_0} est une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près. Donner une telle valeur approchée.
- 5) Déterminer un équivalent de R_n .

F Règle de d'Alembert

21. Étudier la convergence des séries

$$\sum \frac{2^n n!}{n^n} \quad \sum \frac{3^n n!}{n^n}$$

22. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$.
23. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}$.
24. Soit $q \in \mathbb{C}$. Déterminer la nature de la série $\sum nq^n$.

G Formule de Stirling

25. Déterminer la nature de $\sum \frac{n!}{n^n}$ (ce n'est pas forcément la meilleure méthode)

26. Déterminer la nature de $\sum \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}$.

27. Déterminer selon les valeurs des réels α et β la nature de

$$\sum \frac{1}{n^\beta} \left(\frac{2.4 \cdots (2n)}{3.5 \cdots (2n+3)} \right)^\alpha$$

28. Montrer que

$$\pi = e^{\frac{3}{2}} \prod_{n=2}^{+\infty} e \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{n^2}$$

H Comparaison, développement asymptotique

29. Déterminer a et b de sorte que la série de terme général

$$\ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$$

soit convergente et calculer alors sa somme.

30. Déterminer la nature des séries

$$\sum_{n \geq 1} \sin \frac{1}{n} \quad \sum_{n \geq 1} \sin \frac{1}{n^2} \quad \sum_{n \geq 1} \sin \frac{1}{n}$$

31. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \alpha \sin \frac{1}{n} \right]$.

I Convergence absolue

32. Montrer que les séries suivantes convergent absolument :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n^2}{n^2} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^2}$$

33. Étudier la convergence absolue des séries

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{e^{in}}{n+1}$$

J Séries alternées

34. Soit $x \in]-1, 1[$. Étudier la convergence de $\sum (-1)^n x^n$.

35. Étudier la convergence des séries

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+3} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2+2} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1} \quad \sum_{n \geq 1} (-1)^n \sin \frac{1}{n+1}$$

36. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \right)$.

37. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

1) Déterminer le signe de a_n en fonction de n .

2) Montrer que l'on a

$$a_n = (-1)^n \sin \left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n} \right)$$

3) Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente mais non absolument convergente. Montrer aussi que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \right| \leq \frac{1}{2n+2}$$

4) Déterminer un rang n_0 pour lequel la somme partielle $\sum_{k=1}^{n_0} a_k$ est une valeur approchée de la somme S de la série à 10^{-2} près. Donner une telle valeur approchée.

K Produit de Cauchy

38. Calculer $\sum_{n \geq 0} (n+1)3^{-n}$.

39. On suppose connu que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Montrer la convergence et préciser la somme des séries de terme général

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(n-k)!} \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(n-k)^2}$$

40. On pose pour tout n non nul,

$$w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$$

Convergence et calcul de $\sum_{n \geq 1} w_n$.

41. Démontrer que

$$e \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!}$$

avec H_n la somme harmonique

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

42. Soit (u_n) une suite numérique. On note pour tout entier n

$$w_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n 2^k u_k$$

1) On suppose dans cette question que la série $\sum u_n$ est absolument convergente. En utilisant un produit de Cauchy, montrer que la série $\sum w_n$ converge et déterminer sa

somme en fonction de celle de $\sum u_n$.

2) On suppose dans cette question que la suite (u_n) converge vers 0. Déterminer la limite de (w_n) .

3) On suppose dans cette question que $\sum u_n$ est convergente. Montrer que $\sum w_n$ est convergente et déterminer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.

L Exercices concours

43. (CCP PC 2007,2008) Déterminer la nature des séries de terme général

$$u_n = \sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n) \quad v_n = \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$$

44. (CCP PC 2007) Soit (α_n) une suite réelle d'éléments strictement positifs telle que

$$\exists(a, b, c, d) \in (\mathbb{R}^*)^4, \quad \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+d)}$$

Soit $\beta_n = \ln(n^\lambda \alpha_n)$, avec $\lambda = a + b - c - d$. On suppose que $\lambda > 1$.
Montrer que $\sum(\beta_{n+1} - \beta_n)$ converge.

En déduire qu'il existe $k > 0$ tel que $\alpha_n \sim \frac{k}{n^\lambda}$.

45. (ENTPE-EIVP - 2008) $\overline{a_1 \cdots a_n}$ est le nombre constitué en accolant les chiffres $a_1, \dots, a_n$.
Calculer $s_n(a) = \overline{a} + \overline{a\overline{a}} + \cdots + \overline{a \cdots \overline{a}}$ le dernier terme ayant n chiffres.
Calculer $S_N = \sum_{n=1}^N s_n$. La série $\sum \frac{1}{S_N}$ converge-t-elle ?

46. (Centrale - PC 2008) Montrer que les conditions

$$x(0) = -2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, x(n) < 0 \quad x(n) - x(n)^2 = x(n-1)$$

définissent une suite et étudier sa limite éventuelle. Soient

$$u(n) = x(n+1) - x(n) \quad v(n) = \ln(1 + u(n)) \quad w(n) = \prod_{k=0}^n (1 + u(k))$$

Étudier la convergence des séries de termes général $u(n)$ et $v(n)$ puis celle de la suite $(w(n))$.

Au cas où la série de terme général $v(n)$ est convergente, donner à 10^{-2} près, à l'aide de l'outil informatique, une valeur approchée de la série $\sum v(n)$ ou de la suite $(w(n))$.

47. (Mines et Ponts PC 2008) Nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

48. (CCP PSI 2008) Soit P et Q deux polynômes n'ayant aucun entier naturel comme racine.
Nature de la série de terme général $u_n = \ln \left| \frac{P(n)}{Q(n)} \right|$.

49. (CCP PSI 2008) Montrer qu'il a et b uniques réels tels que

$$\sum_{k=0}^n \ln(k+n) = n \ln n + an + b + o(1)$$

50. (ENTPE-EIVP PSI 2013) Nature de la série de terme général

$$\frac{(-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{n + (-1)^n}$$

51. (CCP PSI 2013) Montrer que la série de terme général $a_n = \frac{1}{1^2 + \dots + n^2}$ converge.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ (série harmonique).

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_{2n+1} - H_n = \ln 2$ et en déduire $\sum_{n \geq 1} a_n$.

52. (CCP PSI 2013) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$$

Donner la nature des séries de termes général u_n et $(-1)^n u_n$.

53. (CCP TSI 2008) Soit $\alpha > 1$ et $n \geq 2$. Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{(n-1)^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{2}{n^\alpha}$$

est convergente. Calculer $S = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n$. Pour $n \geq 2$, calculer

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{(k-1)^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha} \right)$$

et en déduire

$$S_n = \sum_{k=2}^n u_k = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}$$

Donner un équivalent simple de $S - S_n$ quand n tend vers $+\infty$.

Indication : on pourra factoriser par $\frac{1}{n^\alpha}$.

54. (Mines et Ponts MP 2013) Soit $a > 0$, étudier la convergence de

$$\sum_{n \geq 1} a^{H_n}$$

avec $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

55. (Centrale 1997) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $s(n)$ le nombre de chiffres dans la représentation de n en représentation binaire.

Montrer que la série de terme général $\frac{s(n)}{n(n+1)}$ converge. Calculer sa somme.

56. (Centrale 1997) Convergence et somme de la série de terme général

$$\frac{1}{n} \left(\left\lfloor \sqrt{n+1} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor \right)$$

57. Étudier la nature de la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

58. Étudier la nature de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - \ln n$$

59. (Saint Cyr 2007) Convergence des séries

$$\sum \frac{\ln n}{n} \quad \sum \frac{\ln n}{n^2}$$

À l'aide d'intégrales, trouver un encadrement de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$ puis un équivalent de S_n .