

Devoir en temps libre °1

Ce problème a pour objet l'étude de la convergence des suites réelles ou complexes au sens de Cesàro. L'objet de la partie est l'étude de cas particuliers. Dans la partie B, on démontre le théorème de Cesàro. Dans la partie C est fait l'étude d'un autre cas particulier plus difficile. La partie D est un exemple d'application de la convergence au sens de Cesàro. Dans la partie E, on étudie le cas particulier d'une suite complexe.

Les programmes en Python sont indépendants de l'étude mathématique et obligatoires. Ils devront être testés et fonctionnels.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe que l'on notera aussi plus simplement (a_n) . On pose

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

et

$$A_n = \frac{a_0 + \cdots + a_n}{n+1} = \frac{S_n}{n+1}$$

(A_n) est appelée suite de Cesàro associée à la suite (a_n) .

On dit que la suite (a_n) converge au sens de Cesàro si la suite (A_n) est convergente. Dans ce cas, la limite de (A_n) est appelé la limite de Cesàro de la suite (a_n) . On définit de même pour une suite réelle les notions de divergence au sens de Cesàro vers $-\infty$ ou $+\infty$. On parle aussi de convergence (ou divergence) en moyenne.

On se propose de démontrer le théorème suivant : si (a_n) converge vers ℓ (respectivement diverge vers $+\infty$ dans le cas d'une suite réelle) alors (a_n) converge au sens de Cesàro vers ℓ (respectivement diverge au sens de Cesàro vers $+\infty$).

On s'intéressera aussi à la réciproque, c'est à dire étudier si la convergence (respectivement divergence vers $+\infty$) au sens de Cesàro implique la convergence usuelle (respectivement divergence vers $+\infty$).

Rappel important : si le montant de votre compte en banque est croissant, et majoré par la coquette somme de 1.000.000.000 €, peut-on en déduire que ce montant converge vers 1.000.000.000 € ?

Partie A : cas particuliers

1. (*) On suppose que $(a_n) = (\lambda)$ où λ est un complexe. Que peut-on dire de la suite (A_n) ?
2. (*) On suppose que $(a_n) = (n)$. Calculer S_n et A_n pour tout entier n . Que peut-on dire de la suite (A_n) ?
3. (*) Mêmes questions avec $(a_n) = (n^2)$.
4. (**) On suppose que $(a_n) = ((-1)^n)$. Calculer S_n et A_n . Conclusion ?
5. On suppose, dans cette question uniquement, que la suite (a_n) est réelle et croissante.

(a) (*) Montrer que ; $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \leq a_n$.

(b) (**) Montrer que la suite (A_n) est croissante.

(c) On suppose de plus que (a_n) converge vers ℓ

- i. (*) Montrer que (A_n) est convergente. Que dire de la limite de (A_n) ?
- ii. (**) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_{2n+1} \geq \frac{1}{2}A_n + \frac{1}{2}a_{n+1}$$

iii. (*) En déduire que (A_n) converge vers ℓ .

(d) Réciproquement, on suppose que (A_n) converge vers ℓ .

- i. (***) Montrer par l'absurde que la suite (a_n) est majorée par ℓ . On montrera que si (a_n) n'est pas majorée par ℓ , il existe un rang N pour lequel $a_N > \ell$ et à partir duquel

$$A_n \geq \frac{n - N + 1}{n + 1} a_N + \frac{a_0 + \cdots + a_{N-1}}{n + 1}$$

- ii. (**) En déduire que (a_n) converge vers ℓ .
 (e) (*) Énoncer le résultat que nous venons de prouver.

Partie B : le théorème de Cesàro

1. On suppose que (a_n) converge vers 0.
 (a) Rappeler la définition élémentaire de « (a_n) converge vers 0 ».
 (b) (*) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On considère un rang $N_0 \geq 1$ à partir duquel on a $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Montrer que si $n \geq N_0$, on a

$$|A_n| \leq \frac{|a_0 + \cdots + a_{N_0-1}|}{n + 1} + \frac{n - N_0 + 1}{n + 1} \frac{\varepsilon}{2}$$

- (c) (***) En déduire qu'il existe un rang N_1 à partir duquel $|A_n| \leq \varepsilon$ et conclure.
 2. On suppose que (a_n) converge vers ℓ . On pose $(b_n) = (a_n - \ell)$.
 (a) (*) Montrer que $(B_n) = (A_n - \ell)$ avec (B_n) la suite de Cesàro associée à la suite (b_n) .
 (b) (*) En déduire que (A_n) converge vers ℓ .

On démontre de manière analogue que si (a_n) est une suite réelle qui diverge vers $+\infty$, alors la suite (A_n) diverge aussi vers $+\infty$ et que lorsque la suite (a_n) est croissante, la réciproque est vraie aussi.

La suite de Cesàro (A_n) associée à la suite (a_n) est en fait la suite des moyennes des $n + 1$ premiers termes. On peut généraliser le théorème de Cesàro à toute sorte de moyennes pondérées différemment.

Partie C : autre exemple avec simulation Python

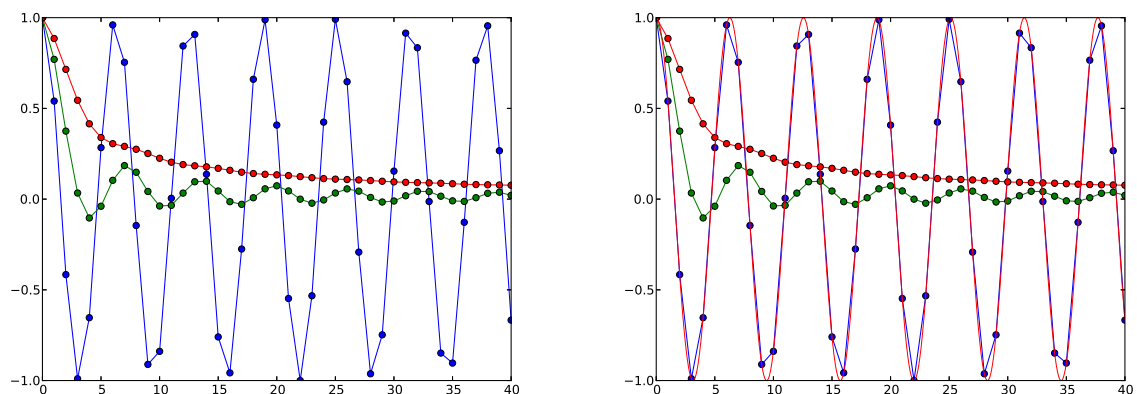
On considère ici la suite (a_n) définie par $(a_n) = (\cos n)$, qui est bien sûr une suite bornée.

1. (***) On souhaite visualiser le comportement des suites (a_n) et (A_n) . En plus, on souhaite itérer le procédé de Cesàro et visualiser aussi le comportement de (Λ_n) la suite de Cesàro associée à (A_n) .

Écrire une fonction Python `courbe` de paramètre n qui permet d'afficher sur un même graphique les termes d'ordre de 0 à n des suites (a_n) , (A_n) et (Λ_n) .

On procédera par étape, en commençant par la représentation de (a_n) seulement, puis en modifiant la fonction pour obtenir en plus la représentation de (A_n) , puis celle de (Λ_n) . On tâchera d'optimiser la fonction en évitant tout calcul redondant.

Appliqué à la suite $(a_n) = (\cos n)$, on obtiendra



Sur le second graphique, on a ajouté la courbe représentative de la fonction cosinus.

2. (*) Que remarque-t-on ? Quel est l'effet de la transformation de Cesàro ?

3. Divergence de $(\cos n)$. On suppose par l'absurde que la suite $(\cos n)$ est convergente.

(a) (**) En utilisant par exemple les formules

$$\cos(n) + \cos(n+2) = 2\cos(n+1)\cos 1 \quad \cos^2 n = \frac{1 + \cos(2n)}{2}$$

aboutir à une contradiction (indication : suites extraites).

4. (**) Réduire $S_n = \cos 0 + \cos 1 + \dots + \cos n$. On utilisera $1 + e^i + \dots + e^{in}$; la forme de l'expression simplifiée obtenue devra répondre à l'objectif de la question suivante.

5. (*) En déduire que (S_n) est bornée et conclure.

Partie D : application aux séries

On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$a_{n+1} = \sin(a_n)$$

1. (*) Montrer que la suite (a_n) est bien définie, positive.

2. (*) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$, $\sin x \leq x$ et représenter graphiquement cette inégalité.

3. (*) Représenter sur le graphique précédent la suite (a_n) . On adaptera au besoin de domaine.

4. (*) Écrire une fonction Python de paramètre n qui permet d'obtenir le graphique ci-dessus.

5. (*) Montrer que la suite (a_n) est décroissante. Que peut-on en déduire ?

6. (**) Montrer que la suite (a_n) converge vers 0.

7. On souhaite étudier la série $\sum a_n$. Pour cela on cherche un équivalent usuel de (a_n) .

(a) (**) En partant d'un développement limité de $\sin x$ en 0 à un certain ordre à déterminer (à l'avance?), déterminer un réel a non nul de sorte que

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = a + o_0(1)$$

(b) (*) En déduire que

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$$

(c) (**) En utilisant le théorème de Cesàro, montrer que

$$a_n \sim \sqrt{\frac{1}{na}}$$

et en déduire la nature de la série $\sum a_n$.

(d) (**) Écrire une fonction Python `recherche_rang` de paramètre un réel h positif qui détermine le plus petit entier n de sorte que

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n > h$$

On ne s'occupera pas des erreurs d'approximations.

Déterminer numériquement le plus petit entier n tel que $\sum_{k=0}^n a_k > 2015$.

8. (**) Déterminer un équivalent simple de $a_n - a_{n+1}$.

9. (***) Déterminer un équivalent simple de

$$a_n - \sqrt{\frac{1}{na}}$$

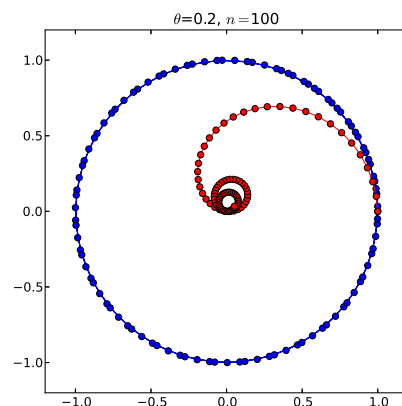
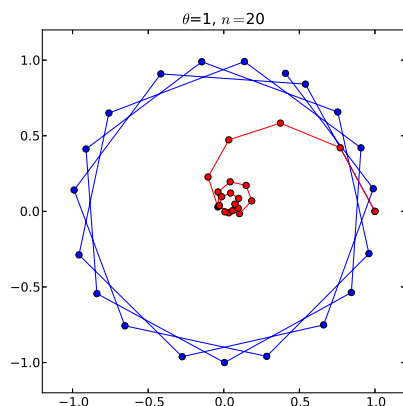
Partie E : exemple d'une suite complexe : simulation

On considère la suite (a_n) définie par $(a_n) = (e^{in\theta})$ où θ désigne un réel.

1. (**) Montrer que (a_n) est convergente si et seulement si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

2. (*) On suppose $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que (A_n) converge vers 0. (Reprendre la méthode de la partie B.)

3. (**) Écrire une fonction Python `courbe_complexe` de paramètres n et θ qui représente les suites complexes (a_n) et (A_n) . On obtiendra par exemple



4. (***) Écrire une fonction complexe `premier_rang` de paramètre θ, e, N qui détermine le premier rang n_0 à partir duquel les N termes successifs de la suite (A_n)

$$A_{n_0}, A_{n_0+1}, \dots, A_{n_0+N-1}$$

sont proches de la limite 0 à e près.

Indications : utiliser une variable dite « drapeau » ayant la valeur booléenne `False` tant que l'on a pas trouvé N termes successifs proche de 0 à e près, et une variable compteur `c` contenant le nombre courant de termes successifs proche de 0 à e près.

Fin



Fonctionnalités Python utiles pour ce devoir

Commandes	fonctionnalités
<code>import numpy as np</code>	importation numpy
<code>import matplotlib.pyplot as plt</code>	importation matplotlib.pyplot
<code>c.real</code>	partie réelle de la variable <code>c</code>
<code>c.imag</code>	partie imaginaire de <code>c</code>
<code>np.cos(x)</code>	fonction cosinus de numpy
<code>np.exp(n*1j*theta)</code>	exponentielle de $in\theta$
<code>liste = []</code>	initialisation d'une liste vide
<code>liste.append(e)</code>	ajout de l'objet <code>e</code> en fin de la liste
<code>np.linspace(a,b,n)</code>	création d'une liste subdivision de $[a, b]$ en n éléments
<code>plt.plot(x,y,'o')</code>	tracé des points d'abscisses de liste <code>x</code> et d'ordonnées de liste <code>y</code>
<code>plt.plot(x,y,'-o')</code>	tracé des points, et reliés
<code>plt.axis('scaled')</code>	axes de même échelle
<code>plt.show()</code>	affichage des courbes

Partie A : cas particuliers

1. Si la suite (a_n) est constante, égale à λ , alors on a pour tout entier n

$$S_n = a_0 + \cdots + a_n = (n+1)\lambda \quad A_n = \lambda$$

et ainsi la suite (A_n) est aussi constante de même valeur.

2. On suppose que $(a_n) = (n)$. Alors pour tout entier n ,

$$S_n = 0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad A_n = \frac{n}{2} = \frac{a_n}{2}$$

Nous avons (a_n) qui diverge vers $+\infty$, et (A_n) aussi (deux fois moins vite).

3. On suppose que $(a_n) = (n^2)$. Alors pour tout entier n ,

$$S_n = 0^2 + 1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad A_n = \frac{n(2n+1)}{6}$$

Nous avons (a_n) qui diverge vers $+\infty$, et (A_n) aussi. On remarquera que

$$A_n \sim \frac{n^2}{3} \sim \frac{a_n}{3}$$

La suite (A_n) diverge vers $+\infty$ «trois fois» moins vite que la suite (a_n) .

4. On suppose que $(a_n) = ((-1)^n)$. Alors

$$S_{2n} = 0 \quad A_{2n} = 0 \quad S_{2n+1} = 1 \quad A_{2n+1} = \frac{1}{2n+2}$$

Ainsi les suites extraites (A_{2n}) et (A_{2n+1}) des termes d'ordres pairs et respectivement impairs convergent toutes deux vers 0. Donc la suite (A_n) converge vers 0, bien que la suite (a_n) soit divergente.

5. On suppose, dans cette question uniquement, que la suite (a_n) est réelle et croissante.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a puisque la suite (a_n) est croissante

$$S_n = a_0 + \cdots + a_n \leq (n+1)a_n \quad A_n \leq a_n$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n &= \frac{S_{n+1}}{n+2} - \frac{S_n}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)S_{n+1} - (n+2)S_n}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)(S_n + a_{n+1}) - (n+2)S_n}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)a_{n+1} - S_n}{(n+1)(n+2)} = \frac{a_{n+1} - A_n}{n+2} \end{aligned}$$

or $A_n \leq a_n \leq a_{n+1}$, et ainsi $A_{n+1} - A_n \geq 0$. Donc la suite (A_n) est croissante.

- (c) On suppose de plus que (a_n) converge vers ℓ

- Comme (a_n) est croissante, convergente vers ℓ , elle est majorée par ℓ . Ainsi d'après la question 5a), la suite (A_n) aussi. Donc la suite (A_n) est croissante, majorée par ℓ , elle est donc convergente vers une limite L avec $L \leq \ell$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} A_{2n+1} &= \frac{a_0 + \cdots + a_{2n+1}}{2n+2} \\ &= \frac{a_0 + \cdots + a_n}{2(n+1)} + \frac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n+1}}{2n+2} \\ &= \frac{1}{2}A_n + \frac{1}{2} \frac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

Or la suite (a_n) est croissante, d'où

$$a_{n+1} + \cdots + a_{2n+2} \geq (n+1)a_{n+1}$$

et ainsi

$$A_{2n+1} \geq \frac{1}{2}A_n + \frac{1}{2}a_{n+1}$$

iii. On passe à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient

$$L \geq \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}\ell$$

soit encore $L \geq \ell$, ce qui combiné à l'inégalité obtenue à la question 5.cii. permet de conclure que $L = \ell$.

Donc la suite (A_n) converge vers la même limite que la suite (a_n) .

(d) Réciproquement, on suppose que (A_n) converge vers ℓ .

i. On suppose par l'absurde que la suite (a_n) n'est pas majorée par ℓ , c'est à dire la négation de

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \ell$$

Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_N > \ell$. Si $n \geq N$, on a par la croissance de la suite (a_n)

$$A_n = \frac{a_0 + \cdots + a_{N-1} + a_N + \cdots + a_n}{n+1} \geq \frac{a_0 + \cdots + a_{N-1}}{n+1} + \frac{(n-N+1)a_N}{n+1}$$

ii. Ainsi en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\ell \geq 0 + 1 \times a_N$$

d'où $\ell \geq a_N > \ell$, ce qui est absurde. Donc la suite (a_n) est majorée par ℓ .

iii. Ainsi la suite (a_n) est croissante majorée. Elle est donc convergente, vers une limite L (avec $L \leq \ell$ seulement, attention). Mais d'après la question 5c., on peut affirmer que (A_n) converge vers L aussi. Or comme (A_n) converge vers ℓ , par unicité de la limite on peut conclure que $L = \ell$. Ainsi (a_n) converge vers ℓ .

(e) On a donc montré que pour une suite croissante (valable aussi pour une suite décroissante), les notions de convergence usuelle et convergence en moyenne sont équivalentes.

Partie B : le théorème de Césàro

1. On suppose que (a_n) converge vers 0.

(a) La suite (a_n) converge vers 0 si par définition

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |a_n| \leq \varepsilon$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On considère un rang $N_0 \geq 1$ à partir duquel on a $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $n \geq N_0$, on a

$$|A_n| = \frac{|a_0 + \cdots + a_n|}{n+1} \leq \frac{|a_0 + \cdots + a_{N_0-1}| + |a_{N_0}| + \cdots + |a_n|}{n+1} \leq \frac{|a_0 + \cdots + a_{N_0-1}|}{n+1} + \frac{1}{n+1} \underbrace{(|a_{N_0}| + \cdots + |a_n|)}_{n-N_0+1 \text{ termes}}$$

et ainsi comme à partir du rang N_0 on a $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$,

$$|A_n| \leq \frac{|a_0 + \cdots + a_{N_0-1}|}{n+1} + \underbrace{\frac{n-N_0+1}{n+1}}_{\leq 1} \frac{\varepsilon}{2}$$

(c) $|a_0 + \cdots + a_{N_0-1}|$ étant une constante, il existe un rang N'_0 à partir duquel

$$\frac{|a_0 + \cdots + a_{N_0-1}|}{n+1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et ainsi à partir du rang $N_1 = \max(N_0, N'_0)$, on a

$$|A_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N_1 à partir duquel $|A_n| \leq \varepsilon$. Ainsi la suite (A_n) converge vers 0.

2. On suppose que (a_n) converge vers ℓ . On pose $(b_n) = (a_n - \ell)$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$B_n = \frac{b_0 + \cdots + b_n}{n+1} = \frac{(a_0 - \ell) + \cdots + (a_n - \ell)}{n+1} = \frac{a_0 + \cdots + a_n - (n+1)\ell}{n+1} = \frac{a_0 + \cdots + a_n}{n+1} - \ell = A_n - \ell$$

et ainsi $(B_n) = (A_n - \ell)$.

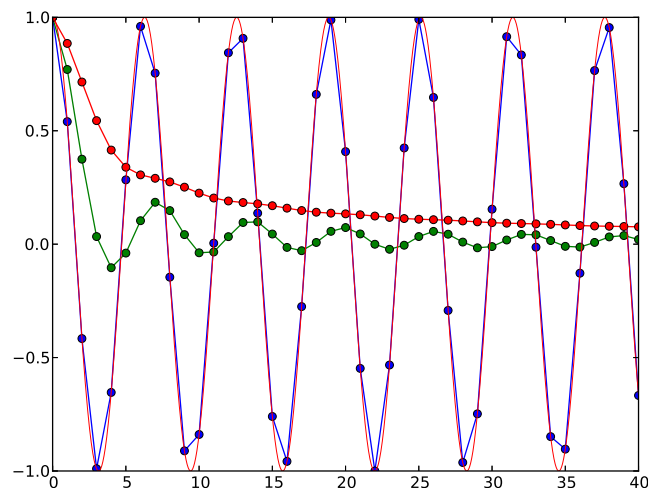
(b) Si (a_n) converge vers ℓ , alors (b_n) converge vers 0, et ainsi d'après la question B.2.b, la suite (B_n) converge vers 0 et donc $(A_n - \ell)$ aussi. On en déduit ainsi que (A_n) converge vers ℓ .

Partie C : autre exemple avec simulation Python

1. Voici le code Python :

```
def courbe(n):
    x = range(n+1) # liste des abscisses
    S = 0          # S_n
    m = 0          # moyenne S_
    lu = []        # liste des a_n
    lmu = []       # liste des A_n
    lmmu = []      # liste des L_n
    for k in range(n+1):
        u = np.cos(k)
        S += u
        m += S/(k+1)
        lu.append(u)
        lmu.append(S/(k+1))
        lmmu.append(m/(k+1))
    plt.plot(x, lu, 'b-o') # tracé de (a_n)
    plt.plot(x, lmu, 'g-o') # tracé de (A_n)
    plt.plot(x, lmmu, 'r-o') # tracé de (L_n)
    x = np.linspace(0, n, 10000)
    y = np.cos(x)
    plt.plot(x, y, 'r-', linewidth = .5,)
    plt.show()
```

`courbe(40)`



2. La suite $(\cos n)$ est divergente. La suite des moyennes converge vers 0 et la suite des moyennes des moyennes aussi bien sûr conformément au paragraphe précédent. Mais la suite des moyennes des moyennes semble décroissante vers 0, tandis que la suite (A_n) des moyennes converge vers 0 en oscillant.

Le processus de Césaro a un effet « lisseur » ou « régularisateur ».

3. Divergence de $(\cos n)$. On suppose par l'absurde que la suite $(\cos n)$ est convergente.

(a) On considère les formules

$$\cos(n) + \cos(n+2) = 2\cos(n+1)\cos 1 \quad \cos^2 n = \frac{1 + \cos(2n)}{2}$$

Alors, on peut passer à la limite, sachant que toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite. On obtient

$$2\ell = 2\ell \cos 1 \quad 2\ell^2 = 1 + \ell$$

soit

$$\ell(1 - \cos 1) = 0 \quad 2\ell^2 - \ell - 1 = 2(\ell - 1)\left(\ell + \frac{1}{2}\right) = 0$$

et ainsi $\ell = 0$ et ($\ell = 1$ ou $\ell = -\frac{1}{2}$), ce qui est impossible. On en déduit donc par l'absurde que la suite $(\cos n)$ ne converge pas.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_n &= \cos 0 + \dots + \cos n \\ &= \Re(e^{i0} + e^{i1} + \dots + e^{in}) \\ &= \Re\left(\frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^i}\right) \end{aligned}$$

que l'on laisse sous cette forme.

5. Alors sachant que $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, on a d'après l'égalité ci-dessus

$$|S_n| \leq \frac{2}{|1 - e^i|}$$

et ainsi la suite (S_n) est bornée, ce qui permet d'en déduire que la suite (A_n) converge vers 0.

Partie D : application aux séries

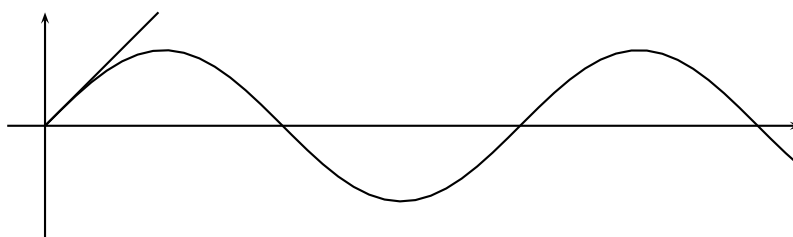
On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$a_{n+1} = \sin a_n$$

1. On considère la fonction $\sin$ sur le domaine $]0, 1]$. Sur ce domaine, $\sin$ est continue strictement croissante et donc elle établit une bijection de $]0, 1]$ sur $] \sin 0, \sin 1] =]0, \sin 1] \subset]0, 1]$. On en déduit que l'intervalle $]0, 1]$ est stable par $\sin$ ce qui permet de définir la suite (a_n) et d'affirmer que (a_n) est une suite de $]0, 1]$.
2. On pose $f(x) = x - \sin x$ sur $\mathbb{R}^+$. La fonction f est dérivable et on a

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

qui reste positif sur $\mathbb{R}^+$, s'annulant de manière isolée en $2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit que pour tout x positif $\sin x \leq x$ avec égalité uniquement en 0.



3. Voir question suivante.
4. Le code Python :

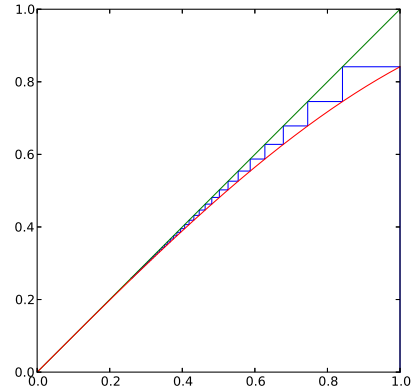
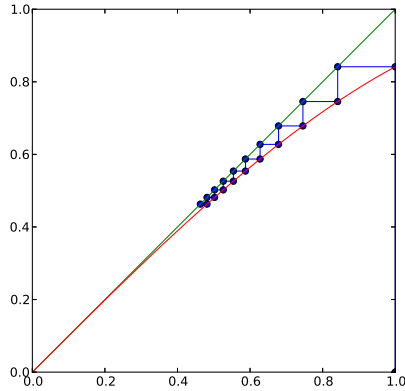
```
def suite_rec(n):
    a = 1
    x = [1]
    y = [0]
    for i in range(n):
        x.append(a)
        a = np.sin(a)
        y.append(a)
        x.append(a)
        y.append(a)
    plt.plot(x,y, '-o')
```

```

x = np.linspace(0,1,1000)
y = np.sin(x)
plt.plot(x,x)
plt.plot(x,y)
plt.axis('scaled')
plt.show()

suite_rec(20)

```



5. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} - a_n = \sin(a_n) - a_n < 0$ puisque $a_n > 0$. Ainsi la suite (a_n) est une suite strictement décroissante.
6. De plus la suite (a_n) est minorée par 0. Donc la suite (a_n) converge vers une limite ℓ avec $\ell \geq 0$.
En passant à la limite dans $a_{n+1} = \sin a_n$, sachant que $\sin$ continue en 0, on obtient que $\ell = \sin \ell$ et ainsi d'après de f , $\ell = 0$. Donc la suite (a_n) converge vers 0.

7. On souhaite étudier la série $\sum a_n$. Pour cela on cherche un équivalent usuel de (a_n) .

(a) On écrit le développement limité de $\sin$ en 0 à l'ordre 3 puis

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sin^2 x} &= \frac{1}{\left(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)^2} = \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{6} + o_0(x^2)\right)^2} \\
 &= \frac{1}{x^2} \times \left(1 - \frac{x^2}{6} + o_0(x^2)\right)^{-2} = \frac{1}{x^2} \times \left(1 + \frac{x^2}{3} + o_0(x^2)\right) \\
 &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + o_0(1)
 \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3} + o_0(1)$$

(b) On a donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$$

On a alors d'après la caractérisation séquentielle des limites, sachant que (a_n) converge vers 0,

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}$$

(c) En utilisant le théorème de Cesàro, on en déduit que

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{a_{k+1}^2} - \frac{1}{a_k^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}$$

soit encore par télescope

$$\frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_0^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}$$

et ainsi

$$\frac{1}{(n+1)a_{n+1}^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}$$

Donc

$$na_n^2 \sim 3$$

puis

$$a_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

On en déduit par comparaison à une série de Riemann divergente que la série $\sum a_n$ est divergente.

(d) Le code Python :

```
def recherche_rang(h):  
    a=1  
    s=1  
    n=0  
    while s<=h:  
        a=py.sin(a)  
        s+=a  
        n+=1  
    return n  
  
print(recherche_rang(2015))  
  
340609
```

8. On a $a_{n+1} = \sin(a_n)$ et (a_n) converge vers 0, ainsi comme $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)$, on a

$$\sin x - x \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$$

d'où

$$\sin a_n - a_n \sim -\frac{a_n^3}{3} \sim -\frac{3\sqrt{3}}{6n^{\frac{3}{2}}}$$

et ainsi

$$a_n - a_{n+1} \sim \frac{\sqrt{3}}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

On peut aussi utiliser le fait que

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} \rightarrow \frac{1}{3}$$

soit encore

$$\frac{a_n^2 - a_{n+1}^2}{a_n^2 a_{n+1}^2} = (a_n - a_{n+1}) \frac{a_n + a_{n+1}}{a_n^2 a_{n+1}^2} \sim \frac{1}{3}$$

et donc

$$a_n - a_{n+1} \sim \frac{a_n^2 a_{n+1}^2}{3(a_n + a_{n+1})}$$

Or puisque $a_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$, on obtient facilement

$$a_n - a_{n+1} \sim \frac{\sqrt{3}}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

Une vérification numérique rapide :

```
def equivalent_ecart(n):  
    a = 1  
    for i in range(n):  
        a = np.sin(a)  
        b = np.sin(a)  
    return (a-b)*2/3**0.5*n**1.5  
  
print(equivalent_ecart(1000))  
  
0.990064754907
```

9. On reprend la question 7. en gagnant un ordre, nous avons

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^3)$$

et ainsi sachant que

$$\frac{1}{(1+u)^2} = 1 - 2u + 3u^2 + o_0(u^2)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 x} &= \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o_0(x^4)\right)^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \times \left(1 + 2\frac{x^2}{6} - 2\frac{x^4}{120} + 3\frac{x^4}{36} + o_0(x^4)\right) \\ &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}x^2 + o_0(x^2) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}a_n^2 + o(a_n^2)$$

et sachant que

$$a_n^2 \sim \frac{3}{n} \quad a_n^2 = \frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

on obtient

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

que l'on somme entre 1 et $n-1$, ce qui conduit à un télescopage à gauche, mais à deux problématiques à droite :

$$\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_1^2} = \frac{n-1}{3} + \frac{1}{5}H_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k$$

avec $\alpha_k = o\left(\frac{1}{k}\right)$, que l'on simplifie déjà en

$$\frac{1}{a_n^2} = \frac{n}{3} + \frac{1}{5}H_n + O(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k$$

(un $O(1)$ est une suite bornée). La comparaison intégrale donne de façon classique

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq H_n \leq 1 + \ln(n) \quad H_n = \ln(n) + O(1)$$

et ainsi

$$\frac{1}{a_n^2} = \frac{n}{3} + \frac{\ln(n)}{5} + O(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k$$

et il nous reste à régler le problème de sommation de terme en petit o de $\frac{1}{n}$. On peut montrer que l'on obtient un petit o de $\ln(n)$ (correspond à une intégration en termes d'intégrales), et ainsi

$$\frac{1}{a_n^2} = \frac{n}{3} + \frac{\ln(n)}{5} + o(\ln n) = \frac{n}{3} \left(1 + \frac{3\ln(n)}{5n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)$$

ce qui conduit à

$$a_n = \sqrt{\frac{3}{n}} \left(1 + \frac{3\ln(n)}{5n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)^{-1/2}$$

puis

$$a_n = \sqrt{\frac{3}{n}} \left[1 - \frac{3\ln(n)}{10n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right]$$

et ainsi

$$a_n - \sqrt{\frac{3}{n}} \sim -\frac{3\sqrt{3}\ln(n)}{10n\sqrt{n}}$$

Prouvons le résultat sur la sommation des petit o : on a $n\alpha_n$ qui converge vers 0, soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang N_0 à partir duquel $n|\alpha_n| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ et ainsi

$$|\alpha_1 + \dots + \alpha_n| \leq |\alpha_1| + \dots + |\alpha_{N_0-1}| + \frac{\varepsilon}{4} \left(\frac{1}{N_0} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

puis

$$\frac{|\alpha_1 + \dots + \alpha_n|}{\ln(n)} \leq \frac{|\alpha_1| + \dots + |\alpha_{N_0-1}|}{\ln(n)} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\frac{1}{N_0} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln(n)}$$

il existe un rang N_1 à partir duquel

$$\frac{|\alpha_1| + \dots + |\alpha_{N_0-1}|}{\ln(n)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et on a aussi

$$\frac{\frac{1}{N_0} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln(n)} = \frac{H_n - H_{N_0-1}}{\ln n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq \frac{1 + \ln(n)}{\ln(n)} \leq 2$$

si $n \geq 3$. Ainsi à partir du rang $\max(3, N_0, N_1)$, on obtient que

$$\frac{|\alpha_1 + \dots + \alpha_n|}{\ln(n)} \leq \varepsilon$$

et on en déduit que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = o(\ln(n))$ (le rapport tend vers 0).

On remarquera l'analogie de cette preuve avec la preuve de Cèsaro.

Partie E : exemple d'une suite complexe : simulation

On considère la suite (a_n) définie par $(a_n) = (e^{in\theta})$ où θ désigne un réel.

1. La suite (a_n) est en fait une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$. Lorsque $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a $(a_n) = (1)$ qui converge vers 1.

Sinon, si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, si on avait (a_n) convergente, $(a_{n+1} - a_n)$ convergerait vers 0. or

$$|a_{n+1} - a_n| = |e^{i(n+1)\theta} - e^{in\theta}| = |e^{in\theta} (e^{i\theta} - 1)| = |e^{i\theta} - 1| \neq 0$$

ce qui signifie que la distance entre deux points consécutifs de la suite est constante non nulle ce qui est contradictoire puisque cette distance devrait tendre vers 0.

Donc la suite (a_n) est divergente (tout en étant bornée).

2. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^n [e^{i\theta}]^k$$

Puisque $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{i\theta} \neq 1$ et ainsi par sommation géométrique

$$S_n = \sum_{k=0}^n [e^{i\theta}]^k = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

et donc

$$|A_n| \leq \frac{2}{(n+1)|1 - e^{i\theta}|}$$

ce qui permet de conclure que la suite (A_n) converge vers 0.

3. Le code Python :

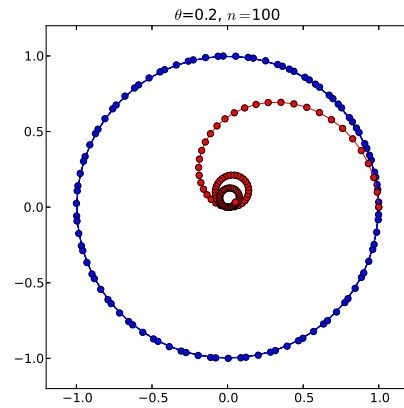
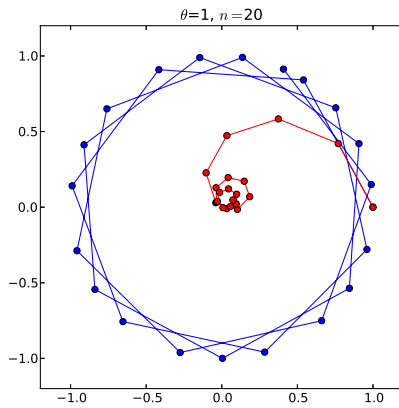
```
def courbe_complexe(n, theta):
    s = 0
    lux = []
    luy = []
    lmux = []
    lmuy = []

    for k in range(n+1):
        a = np.exp(k*1j*theta)
        s += a
        lux.append(a.real)
        luy.append(a.imag)
        lmux.append((s/(k+1)).real)
        lmuy.append((s/(k+1)).imag)
```

```

plt.plot(lux,luy,'-o')
plt.plot(lmux,lmuy,'-o')
plt.axis('scaled')
plt.xlim(-1.2,1.2) # on écarte un peu la vue
plt.ylim(-1.2,1.2)
plt.title(r'$\theta$=%s, $n$=%s'%(theta,n)) # titre formaté
plt.show()

```



4. Le code Python :

```

def premier_rang(theta,e,N):
    S = 1.
    n = 0
    trouve = False # drapeau
    c = 0 # compteur de termes successifs convenables
    while not trouve:
        n += 1
        a = np.exp(n*1j*theta)
        S += a
        if abs(S/(n+1)) > e:
            c = 0 # échec, on remet le compteur à zéro
        else:
            c += 1
        if c == N: # N d'affilés convenables trouvés
            trouve = True # c'est fini
    return n-N+1 # retourne la bonne valeur n0

```