Devoir °2

Problème

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ avec pour tout entier n non nul, et $x > -1$

$$f_n(x) = \frac{1}{n(n+x)}$$

1. (*) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]-1, +\infty[$ vers une fonction somme que l'on notera S.
2. (**) Montrer que la convergence est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > -1$.
3. (*) En déduire que la fonction somme S est continue sur $]-1, +\infty[$.
4. (*) Exprimer $S(0)$ en terme de somme d'une série numérique.
5. (**) En utilisant le fait que (décomposition de la fraction selon n)

$$\frac{1}{n(n+x)} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) \qquad (*)$$

   déterminer $S(p)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. On trouvera $S(p) = \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}$.
6. (*) Montrer que la fonction somme S est strictement décroissante sur $]-1, +\infty[$.
   En déduire que S admet une limite finie en $+\infty$ et déterminer cette limite.
7. (**) Soit $x > -1$, en utilisant (*), montrer que

$$(x+1)S(x+1) - xS(x) = \frac{1}{x+1}$$

   On travaillera avec les sommes partielles.
8. (**) En déduire que

$$S(x) \underset{x\to -1}{\sim} \frac{1}{x+1}$$

   et précisez alors $\lim_{x\to -1} S(x)$.
9. (a) (*) On rappelle que $H_n \sim \ln n$. Montrer que (voir Q5.) que

$$S(n) \sim \frac{\ln n}{n}$$

   (b) (**) On rappelle que si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ avec $f(x) \to_{x\to+\infty} +\infty$, alors $\ln f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln g(x)$.

En utilisant la définition de la partie entière de x, que l'on note $\lfloor x \rfloor$, montrer que

$$\lfloor x \rfloor \underset{x \to +\infty}{\sim} x$$

Montrer que

$$S(\lfloor x \rfloor) \geqslant S(x) \geqslant S(\lfloor x \rfloor + 1)$$

et en déduire que

$$S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$$

Retrouvez $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x)$.

10. (*) Tracer la courbe de la fonction S conformément aux résultats obtenus précédemment.
11. (a) (*) Énoncer le théorème de classe $\mathcal{C}^p$ pour les séries de fonctions.

    (b) (**) Montrer que pour tout entier non nul, f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que l'on a pour tout p de $\mathbb{N}^*$,

    $$f_n^{(p)}(x) = \frac{1}{n} \frac{(-1)^p p!}{(n+x)^{p+1}}$$

    (c) (**) Montrer que la série de fonction $\sum f_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, $a > -1$.

    (d) (*) En déduire que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ et que l'on a

    $$S^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{(-1)^p p!}{(n+x)^{p+1}}$$

    (e) (*) Pour tout p de $\mathbb{N}$, déterminer $S^{(p)}(0)$ sous forme d'une série numérique, puis à l'aide de la fonction ζ définie sur $]1, +\infty[$ par

    $$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

    (f) (*) Montrer que

    $$S(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \zeta(k+2) x^k + \mathrm{o}_0(x^n)$$

* *

*