Quinzaine 3 du 16/10 au 10/11

Chapitre 2 : *Suite et série de fonctions*
Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions. Pour établir la convergence normale de $\sum f_n$, les étudiants doivent savoir utiliser une série numérique convergente $\sum \alpha_n$ majorante, c'est à dire telle que pour tout n, $\| f_n \|_\infty \leqslant \alpha_n$.
La convergence normale entraîne la convergence uniforme (*). La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point.

Régularité de la somme d'une série de fonctions.
Continuité de la somme : si $\sum f_n$ converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.
Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I ou d'autres intervalles adaptés à la situation.

Théorème de la double limite : si $\sum f_n$ converge uniformément sur I de somme f et si pour tout n, f_n admet un limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum_{n\geqslant 0} \ell_n$ converge et on a $\lim_{x\to a} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.
Intégration terme à terme d'une série de fonctions : soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ alors la série des intégrales est convergente et on a :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$$

Dérivation terme à terme d'une série de fonctions : soit (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et si la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur I, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$. Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I ou d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Les étudiants peuvent appliquer directement un théorème concluant au caractère $\mathcal{C}^k$ de la somme, avec la convergence simple des séries $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(i)}$ pour $0 \leqslant i \leqslant k-1$ et la convergence uniforme (ou uniforme sur tout segment de I ou d'autres intervalles adaptés à la situation) de $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$.

Exemple des fonctions

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\ ,\ \eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

Utilisation du critère spécial des séries alternées pour la majoration en module d'un reste.

Chapitre 3 : *Séries entières*
Série entière de la variable réelle, de la variable complexe.
Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente (*).
Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.
Pour $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument, et pour $|z| > R$, diverge grossièrement.
Commentaires : les élèves doivent pouvoir exploiter les informations suivantes :
$(a_n z_0^n)$ bornée ; $(a_n z_0^n)$ non bornée ; $\sum a_n z_0^n$ convergente ; $\sum a_n z_0^n$ divergente ; $\sum a_n z_0^n$ absolument convergente mais divergente ; $\forall z$ avec $|z| < r$, la suite $(a_n z^n)$ bornée ou $\sum a_n z^n$ convergente ; et autres, en termes de conséquences sur le rayon.
Disque ouvert de convergence, intervalle de convergence (et cercle d'incertitude)
Si R_a est le rayon de convergence de $\displaystyle\sum a_n z^n$ et R_b celui de $\sum b_n z^n$, alors :
si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ ou si $a_n = \mathrm{o}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$
si $|a_n| \sim |b_n|$ ou $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.
Utilisation de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon. La limite du rapport $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ peut être directement utilisée.
Les élèves doivent savoir utiliser, en adaptant, la règle de d'Alembert pour les séries lacunaires, par exemple de la forme $\sum b_n z^{2n}$ et $\sum b_n z^{2n+1}$.
Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence (*). Rayon de convergence d'une série dérivée.

Questions de cours :

- Les énoncés des définitions, des théorèmes.
- Les démonstrations marquées par (*).
- Les méthodes usuelles sur des exemples.