

Quinzaine 2 du 28/09 au 09/10

N.B. : tout n'a pas été revu forcément, veuillez vous référer aussi à votre cours de première année, bien sûr.

Révision 3 : Séries numériques - Cours de Sup

Série à termes réels ou complexes ; sommes partielles ; convergence ou divergence ; somme et restes en cas de convergence. Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Divergence grossière.

Contre exemple de la série harmonique avec méthodologie particulière : $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$ (*).

Une suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge. Série télescopique.

Série géométrique : convergence et somme (*).

Série exponentielle complexe.

Séries à termes positifs. Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite des sommes partielles qui est croissante est majorée.

Théorème de comparaison, par équivalence. Exemple de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ par comparaison à $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ et décomposition en éléments simples et télescopage (*).

Convergence absolue ou sommabilité. Convergence absolue et convergence.

Convergence par domination.

Chapitre 2 : Compléments sur les séries numériques

Formule de Stirling : équivalent de $n!$. Preuve complète pour mise en valeur des méthodes.

Comparaison géométrique : critère de d'Alembert (*). Exemples.

Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste et de la somme (ou critère de Leibniz). Exemple avec les séries de Riemann alternées.

Utilisation de la majoration du reste pour déterminer une valeur approchée de la somme.

Exemples avec utilisation de développements asymptotiques en cas de non décroissance du terme général.

Pour une fonction continue et monotone positive, encadrement des sommes partielles de la série $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles (intégrales) ; diverses situations (f définie sur $[0, +\infty[$ ou sur $[1, +\infty[$), divers encadrements. Application aux séries de Riemann. Détermination d'un équivalent du reste d'ordre n dans le cas de convergence. Détermination d'un équivalent de la somme partielle dans le cas de divergence. On a (*)

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n$$

et aussi si $\alpha < 1$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$$

et si $\alpha > 1$,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Remarques sur la suite des sommes des erreurs.

Produit de Cauchy $\sum w_n$ de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ avec

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k = \sum_{p+q=n} u_p v_q$$

Théorème fondamental (admis) : si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors le produit de Cauchy $\sum w_n$ aussi et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

Preuve dans le cas des termes positifs puis réels.

Exemples d'utilisation du produit de Cauchy de deux séries numériques.

Produit de Cauchy d'une série géométrique avec elle-même (*).

Produit de Cauchy de deux séries alternées.

Questions de cours :

- Les énoncés des définitions, des théorèmes.
- Les démonstrations marquées par (*).
- Les méthodes usuelles sur des exemples.

