

Devoir en temps libre °2

Exercice A

Soit $(a, b, c, d) \in (\mathbb{R}^*)^4$ fixé, on considère une série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n$ à termes strictement positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+d)}$$

1. Quelle est la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$? Conclusion ?

Et si on avait par exemple $a = b = 2, c = d = 1$?

2. Soit λ un réel, on pose pour tout entier n non nul, $w_n = \ln(n^\lambda u_n)$.

- (a) Montrer que

$$w_{n+1} - w_n = \lambda \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$$

- (b) Montrer que si u est un réel non nul, on a (avec un « grand O »)

$$\ln(n+u) = \ln(n) + \frac{u}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

- (c) En déduire que

$$w_{n+1} - w_n = \frac{\lambda + a + b - c - d}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

- (d) En déduire que la série $\sum (w_{n+1} - w_n)$ converge si et seulement si $\lambda = c + d - a - b$.

- (e) On pose désormais $\lambda = c + d - a - b$. Montrer que la suite (w_n) est convergente.

- (f) Montrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que $u_n \sim \frac{A}{n^\lambda}$.

- (g) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que la série $\sum u_n$ soit convergente.

3. Étudier la nature de la série de terme général u_n avec

$$u_n = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

- a) en utilisant l'étude ci-dessus

- b) à l'aide de la formule de Stirling et préciser la valeur de A .

Exercice B

Soit $\alpha > 0$, on considère la série numérique

$$\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$$

On notera u_n le terme général de cette série.

1. Montrer la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ est une série alternée.

2. Déterminer un équivalent de u_n et en déduire que la suite (u_n) converge vers 0.

Toto applique le théorème de comparaison par équivalence : qu'en déduit-il ? À-t-il raison ?

3. Montrer que $\sum u_n$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.

4. Démontrer que l'on a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)$$

5. Montrer alors que si $\alpha > \frac{1}{2}$, la série numérique $\sum u_n$ est convergente.
6. On suppose que $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Montrer que

$$u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \sim -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$$

et conclure.

7. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n$ soit convergente et comparer avec le résultat de Toto.
8. La suite positive

$$(-1)^n \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$$

est-elle décroissante ?

Fin

