

Étude de la série de fonctions $\sum (x^n)$.

On considère la série de fonctions $\sum (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$f_n(x) = x^n$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement uniquement sur $] -1, 1[$ et préciser sa fonction somme notée S .

Représenter la courbe de la fonction S .

Peut-on définir $S(-1)$?

2. Pour $x \in] -1, 1[$, préciser la somme partielle

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) = \sum_{k=0}^n x^k$$

ainsi que le reste d'ordre n ,

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

On trouvera $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

3. Étude de la convergence uniforme.

(a) On se place sur $] -1, 1[$.

La fonction R_n est-elle bornée sur $] -1, 1[$?

On pose $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Montrer que

$$R_n(x_n) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim \frac{n}{e}$$

En déduire que la série de fonctions $\sum (x^n)$ ne converge pas uniformément vers S sur $] -1, 1[$.

Intuitivement, le problème de la non convergence uniforme vient « d'où » ?

- (b) On se place sur $[-a, a]$ où $0 < a < 1$.

Montrer que

$$\forall x \in [-a, a], |R_n(x)| \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

En déduire que

$$\|R_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

(il y a en fait égalité, pourquoi ?) En déduire que la série de fonctions $\sum(x^n)$ converge uniformément sur $[-a, a]$.

4. Étude de la convergence normale.

(a) On se place sur $] -1, 1[$.

Montrer que pour tout entier n , $\|f_n\|_{\infty,]-1, 1[} = 1$.

En déduire que la série de fonctions $\sum(x^n)$ ne converge pas normalement sur $] -1, 1[$.

(b) On se place sur $[-a, a]$ avec $0 < a < 1$.

Déterminer $\|f_n\|_{\infty, [-a, a]}$. En déduire que la série de fonctions $\sum(x^n)$ converge normalement sur $[-a, a]$.

Que peut-on en déduire ? (pour la convergence uniforme ? pour la convergence simple ?)

Étude de la série de fonctions $\sum (x^n)$.

On considère la série de fonctions $\sum (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$f_n(x) = x^n$$

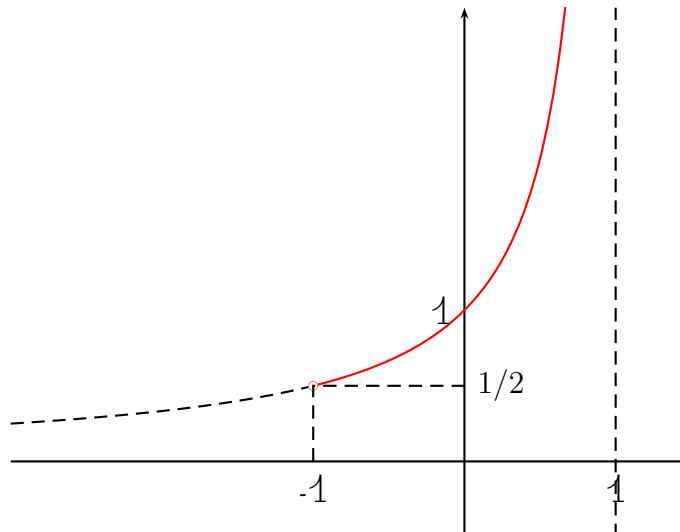
1. Montrer que la série de fonctions $\sum (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement uniquement sur $] -1, 1[$ et préciser sa fonction somme notée S .

Soit $x \in \mathbb{R}$, la série géométrique numérique $\sum x^n$ converge si et seulement si $x \in] -1, 1[$ et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = S(x)$$

Ainsi la série de fonctions $\sum (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement uniquement sur $] -1, 1[$ vers $x \mapsto \frac{1}{1-x} = S(x)$.

Représenter la courbe de la fonction S .



Peut-on définir $S(-1)$?

Ici S désigne la limite simple de la série $\sum (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie uniquement sur $] -1, 1[$, et donc $S(-1)$ n'est pas défini.

Par contre, on peut définir la valeur en -1 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ qui vaut $\frac{1}{2}$, mais attention, cela n'a rien à voir !

(Ici la fonction S peut se prolonger par continuité en -1 et même au delà jusqu'à $-\infty$)

2. Pour $x \in]-1, 1[$, on a la somme partielle

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

ainsi que le reste d'ordre n ,

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

3. Étude de la convergence uniforme.

(a) On se place sur $] -1, 1[$.

La fonction R_n est-elle bornée sur $] -1, 1[$? Et bien non, puisque $R_n(x)$ tend vers $+\infty$ en 1^- . On ne peut pas définir $\|R_n\|_{\infty,]-1, 1[}$. cela empêche la convergence uniforme de (R_n) vers la fonction nulle (par la définition, les fonctions R_n sont forcément bornées à partir d'un certain rang), c'est à dire de (S_n) vers S , et donc la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$: on peut préciser par rapport à la condition suffisante de non convergence uniforme énoncée dans le cours qui est plus générale et donc plus universelle (parfois les fonctions R_n sont toutes bornées sans qu'il y ait convergence uniforme).

On pose $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. On a

$$R_n(x_n) = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

et on sait que attention (rappel ...)

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-1 + o\left(\frac{1}{n}\right)} \longrightarrow \frac{1}{e}$$

et ainsi

$$R_n(x_n) \sim \frac{n}{e}$$

Ainsi la série de fonctions $\sum (x^n)$ ne converge pas uniformément vers S sur $] -1, 1[$ car sinon, par la définition, on devrait avoir pour toute suite (x_n)

de $] -1, 1[$, $(R_n(x_n))$ convergeant vers 0.

Intuitivement, le problème de la non convergence uniforme vient de la proximité de x_n avec 1 (qui rend R_n non bornée sur $] -1, 1[$).

(b) On se place sur $[-a, a]$ où $0 < a < 1$.

On a si $x \in [-a, a]$, $|x| \leq a$ et $1 - x \geq 1 - a > 0$ et ainsi

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

On en déduit que

$$\| R_n \|_{\infty, [-a, a]} \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

Il y a en fait égalité, car pour $x = a$, $R_n(a) = \frac{a^{n+1}}{1-a}$.

On a alors la suite $(R_{n\infty, [-a, a]})$ qui converge vers 0 et on en déduit que la série de fonctions $\sum(x^n)$ converge uniformément sur $[-a, a]$.

4. Étude de la convergence normale.

(a) On se place sur $] -1, 1[$.

Pour tout entier n , on a si $x \in] -1, 1[$, $|f_n(x)| = |x|^n$, et ainsi $\| f_n \|_{\infty,] -1, 1[} = \sup_{x \in] -1, 1[} |f_n(x)| = 1$.

Comme la série numérique $\sum \| f_n \|_{\infty,] -1, 1[}$, on en déduit que la série de fonctions $\sum(x^n)$ ne converge pas normalement sur $] -1, 1[$.

(b) On se place sur $[-a, a]$ avec $0 < a < 1$.

On a alors $\| f_n \|_{\infty, [-a, a]} = a^n$ et ainsi la série numérique $\sum \| f_n \|_{\infty, [-a, a]} = \sum a^n$ converge, et donc la série de fonctions $\sum(x^n)$ converge normalement sur $[-a, a]$.

Même si on le sait déjà, on en déduit la convergence uniforme sur tout $[-a, a]$, et donc la convergence simple aussi.

Attention, on obtient ainsi la convergence simple sur $] -1, 1[$ (c'est une convergence, on le rappelle, point par point, la vitesse de convergence peut être très différente selon la valeur de x) tout entier mais surtout pas la convergence uniforme (qui est une convergence globale, la vitesse de convergence est à peu près la même pour tout les x) sur $] -1, 1[$ qui comme on l'a

vu, est fausse.