Devoir surveillé n°3
3 heures

Exercice : une suite de fonctions

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f_n(x) = n^2x^2\mathrm{e}^{-nx}$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,+\infty[$ notée f.
2. Déterminer les variations de la fonction f_n sur $(0,+\infty[$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   Tracer les courbes représentatives de f_0, f_1, f_2 et f_3. On précisera les tangentes en 0.
   Sur un autre dessin, avec sans doute un zoom par rapport au dessin précédent, tracer les courbes représentatives de f_0, f_1,..., f_6.
   La convergence de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction nulle paraît-elle graphiquement uniforme sur $[0,+\infty[$ et pourquoi ?
3. Que vaut $\| f_n - f \|_{\infty,[0,+\infty[}$?
   La convergence de la suite de fonctions (f_n) est-elle uniforme sur $[0,+\infty[$?
4. Soit $a > 0$. On note N_0 de sorte que si $n \geqslant N_0$, $\frac{2}{n} \leqslant a$. Montrer que si $n \geqslant N_0$,

$$\| f_n - f \|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a) = a^2n^2\mathrm{e}^{-na}$$

   et en déduire que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,+\infty[$.
   Tracer approximativement, mais de façon cohérente, par exemple sur $[2,+\infty[$, les fonctions f_n pour $n = 0,\dots,10$ dans le but de bien faire visualiser cette convergence uniforme.

Problème : une série de fonctions

On pose

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

On notera f_n la fonction définie par $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$ pour $n \geqslant 1$.

1. Montrer que le domaine de définition de σ est $[-1,1]$.
2. Montrer que σ est strictement croissante sur $[0,1]$.
3. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $\sigma(x)$ est du signe de x.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\| f_n \|_{\infty,[-1,1]}$.
   En déduire que la fonction σ est continue sur $[-1,1]$.
5. Justifier que les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ et préciser $f_n'(x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$.

6. Montrer que la série $\sum f_n'$ converge simplement sur $[-1,1[$. On note S sa fonction somme, S_n sa somme partielle, et R_n le reste, d'ordre n, de sorte que

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \qquad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k}$$

7. Déterminer $\| f_n' \|_{\infty,[-1,1[}$ pour $n \geqslant 1$. Que peut-on en déduire ?
8. Montrer que pour tout n non nul, f_n' admet une limite ℓ_n en 1. Que peut-on dire de la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \ell_n$? La convergence de la série $\sum f_n'$ est-elle uniforme sur $[-1,1[$? sur $[0,1[$?
9. Soit a réel avec $0 < a < 1$. Déterminer $\| f_n' \|_{\infty,[-a,a]}$ pour $n \geqslant 1$. En déduire que la fonction σ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et exprimer $\sigma'(x)$ à l'aide d'une somme.
10. Soit $x \in [-1,0]$. Vérifier que la série numérique $\sum f_n'(x)$ est alternée. En déduire que pour tout entier n non nul,

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Montrer alors que la série des dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[-1,0]$.
En déduire que σ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1[$, et que

$$\forall x \in [-1,1[\,,\ \sigma'(x) = S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

Que vaut $\sigma'(-1)$? (On donnera le résultat usuel sans preuve).
11. Montrer que σ est strictement croissante sur $[-1,1]$.
12. On admet que $\sigma(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $\sigma(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$ (on calculera $\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n^2}$ en séparant les termes d'indices pairs des termes d'indices impairs).
13. Montrer que la fonction σ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$ et que l'on a

$$\forall x \in [-1,1[\,,\ \sigma''(x) = S'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n} x^{n-2}$$

En déduire que $\sigma'' > 0$ sur $[0,1[$. Que peut-on en déduire pour la fonction σ ? Pour σ' ?
14. On suppose que σ' admet une limite finie L en 1. Montrer que si $N \geqslant 2$,

$$\sigma'(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n-1}}{n}$$

et en déduire que $L \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$. Conclusion ? En déduire que σ' admet $+\infty$ comme limite en 1.
15. Tracer la courbe représentative de σ conformément aux résultats établis précédemment.
16. Montrer que

$$\int_0^1 \sigma(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)n^2}$$

Montrer que l'on peut écrire pour $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{(n+1)n^2} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n^2}$$

avec a, b, c des constantes réelles. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \sigma(x)\mathrm{d}x$. On trouvera

$$\int_0^1 \sigma(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

Fin

Exercice : une suite de fonctions

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f_n(x) = n^2x^2\mathrm{e}^{-nx}$$

1. Soit $x \in [0,+\infty[$, $n \in \mathbb{N}$,
   – si $x = 0$, $f_n(x) = 0$ et ainsi la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers 0.
   – si $x > 0$, comme e^{-nx} l'emporte sur n^2, on a

   $$f_n(x) = x^2n^2\mathrm{e}^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

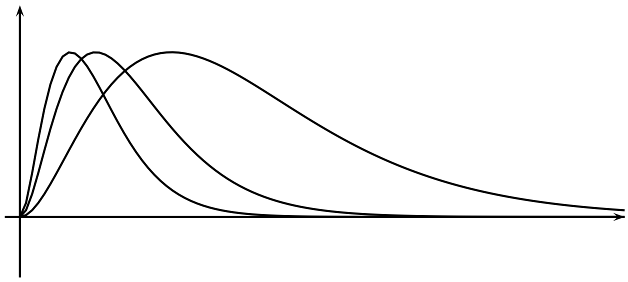
   Ainsi la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,+\infty[$ notée f.
2. Pour $n = 0$, $f_n = 0$. On suppose désormais que $n \geqslant 1$. la fonction f_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ avec

   $$f'(n(x) = n^2(2x\mathrm{e}^{-nx} - nx^2\mathrm{e}^{-nx}) = xn^2(2-nx)\mathrm{e}^{-nx}$$

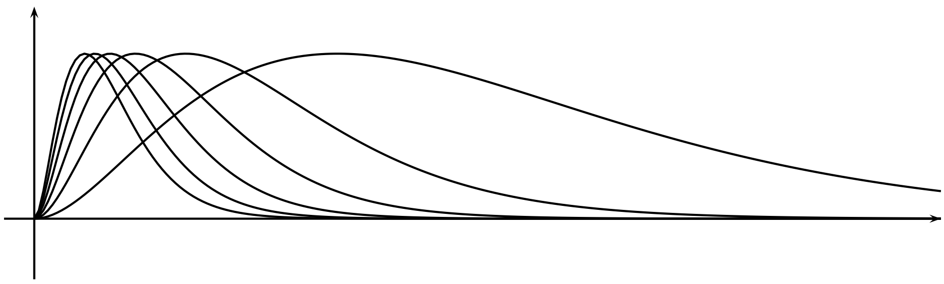
   On en déduit les variations de la fonction f_n sur $[0,+\infty[$:

x	0		$\frac{2}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$\frac{4}{\mathrm{e}^2}$	$\searrow$	0

   On trace alors les courbes représentatives de f_0, f_1, f_2 et f_3 : (l'échelle en y est multipliée par 4 ici pour mieux visualiser les bosses) :



   On trace les courbes représentatives de f_0, f_1,..., f_6 :



La convergence de la suite de fonctions (f_n) ne paraît pas uniforme sur $[0,+\infty[$, la courbe de f_n ne se rapprochant pas uniformément vers la fonction nulle sur tout le domaine $[0,+\infty[$.

3. On a $\| f_0 - f \|_{\infty,[0,+\infty[} = 0$ et si $n \geqslant 1$, d'après les variations de la fonction f_n,

$$\| f_n - f \|_{\infty,[0,+\infty[} = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{\mathrm{e}^2}$$

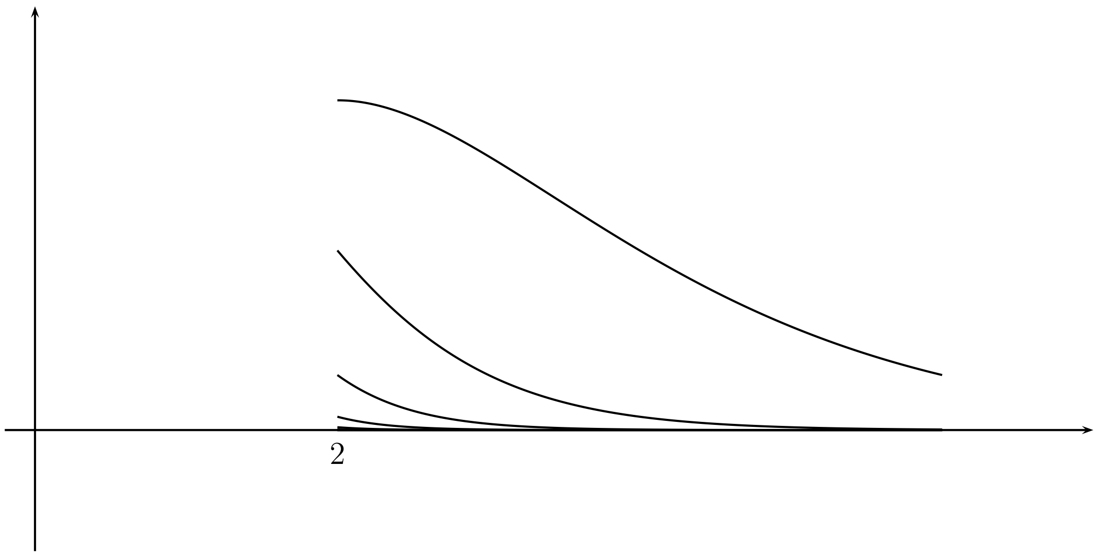
qui ne tend pas vers 0, et donc la convergence de la suite de fonctions (f_n) n'est pas uniforme sur $[0,+\infty[$, ce qui confirme notre interprétation graphique.

4. Soit $a > 0$. On note N_0 de sorte que si $n \geqslant N_0$, $\frac{2}{n} \leqslant a$. Si $n \geqslant N_0$, comme la fonction f_n est décroissante positive sur $[a,+\infty[$, nous avons

$$\| f_n - f \|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a) = a^2 n^2 \mathrm{e}^{-na}$$

qui tend vers 0 et ainsi la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f (la fonction nulle) sur $[a,+\infty[$.

On trace sur $[2,+\infty[$, les fonctions f_n pour $n = 0,\dots,10$ dans le but de bien faire visualiser cette convergence uniforme (la convergence est très rapide, à partir de f_5, la courbe se confond presque avec la courbe de la fonction nulle) :



Problème : une série de fonctions

On pose

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

On notera f_n la fonction définie par $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$ pour $n \geqslant 1$.

1. Si $x \in [-1,1]$, nous avons

$$\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

et comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, on en déduit que la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ est absolument convergente, et donc convergente.

Si $|x| > 1$, c'est à dire si $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, nous avons par croissance comparée

$$\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et ainsi la numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ diverge grossièrement et donc diverge.

Ainsi le domaine de définition de la fonction σ est $[-1, 1]$.

2. Si $0 \leqslant x < y \leqslant 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x^n \leqslant y^n$, puis $f_n(x) < f_n(y)$ et ainsi en sommant $\sigma(x) < \sigma(y)$.
   On en déduit que la fonction σ est strictement croissante sur $[0, 1]$.
3. Si $x \in [0, 1]$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n(x) \geqslant 0$ et ainsi en sommant, $\sigma(x) \geqslant 0$.
   Pour $x \in [-1, 0[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ est une série alternée, et elle vérifie le critère spécial des séries alternée puisque $\frac{|x|^n}{n^2}$ décroît vers 0. Ainsi $\sigma(x)$ est du signe du premier terme qui est x, soit donc de signe négatif.
   Donc pour tout x de $[-1, 1]$, $\sigma(x)$ est du signe de x.
   Précisément,
$$\forall x \in [-1, 1], \begin{cases} \sigma(x) < 0 & \text{si } x \in [-1, 0[\\ \sigma(x) = 0 & \text{si } x = 0 \\ \sigma(x) > 0 & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases}$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\| f_n \|_{\infty,[-1,1]} = \frac{1}{n^2}$ puisque si $x \in [-1, 1]$,
$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$$
   et que $f_n(1) = \frac{1}{n^2}$. Comme la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, on en déduit que la série numérique $\sum \| f_n \|_{\infty,[-1,1]}$ converge et ainsi la série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur $[-1, 1]$, et donc uniformément. Or les fonctions f_n sont toutes continues sur $[-1, 1]$, et ainsi d'après le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, on en déduit que la fonction σ est continue sur $[-1, 1]$.
5. Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$ comme monôme et on a si $n \geqslant 1$ et $x \in [-1, 1]$
$$f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{n}$$
6. Soit $x \in]-1, 1[$, nous avons pour $n \geqslant 1$,
$$|f_n'(x)| = \left|\frac{x^{n-1}}{n}\right| \leqslant |x|^{n-1}$$
   et ainsi comme la série géométrique $\sum |x|^{n-1}$ converge, la série numérique $\sum f_n'(x)$ est absolument convergente, donc convergente.
   Pour $x = -1$, on a $\sum f_n'(x)$ qui est la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ harmonique alternée, convergente par le critère spécial des séries alternées.
   Pour $x = 1$, la série numérique $\sum f_n'(x)$ est la série $\sum \frac{1}{n}$ harmonique, divergente.
   Ainsi la série de fonctions $\sum f_n'$ converge simplement sur $[-1, 1[$. On note S sa fonction somme, S_n sa somme partielle, et R_n le reste, d'ordre n, de sorte que
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \qquad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k}$$

7. On a $\| f_n' \|_{\infty,[-1,1[} = \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Ainsi l n'y a pas convergence normale sur $[-1,1[$ de la série de fonctions $\sum f_n'$.
8. Soit n non nul, on a
$$f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{n} \underset{x \to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{n} = \ell_n$$
La série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 1} \ell_n$ diverge. Ainsi la convergence de la série $\sum f_n'$ n'est pas uniforme sur $[-1,1[$ et non plus sur $[0,1[$, car sinon le théorème de la double limite impliquerait la convergence de la série numérique $\sum \frac{1}{n}$.
9. Soit a réel avec $0 < a < 1$. On a, vu les variations de f_n', $\| f_n' \|_{\infty,[-a,a]} = \frac{a^{n-1}}{n} \leqslant a^{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.
Comme la série géométrique $\sum a^{n-1}$ est convergente, nous avons donc la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions $\sum f_n'$ sur $[-a,a]$, pour tout a, $0 < a < 1$. Comme les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$, que la série $\sum f_n$ est simplement convergente sur $]-1,1[$, que les intervalles $[-a,a]$ sont bien adaptés à $]-1,1[$ pour le recouvrement, la fonction σ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et on a
$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \sigma'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}.$$
10. Soit $x \in [-1,0]$. On étudie la série numérique $\sum f_n'(x)$, c'est à dire $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{x^{n-1}}{n}$. Comme $x \leqslant 0$, elle est bien alternée. En plus, comme $|x| \leqslant 1$, on a $\left|\frac{x^{n-1}}{n}\right|$ qui décroît vers 0. Ainsi elle vérifie le critère spécial des séries alternées, et donc pour tout entier n non nul, nous avons
$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$$
Ainsi $\| R_n \|_{\infty,[-1,0]}$ qui converge vers 0, ce qui assure que la série des dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[-1,0]$.
Comme les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,0]$, σ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,0]$, avec
$$\forall x \in [-1,1[\,,\ \sigma'(x) = S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$
puisque cela était déjà vrai sur $]-1,1[$. On a donc
$$\sigma'(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$
11. Si $x \in [-1,1[$, on a
$$\sigma'(x) = S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$
Déjà, si $x > 0$, $\sigma'(x) > 0$. On a $\sigma'(0) = 1$ et pour $x \in [-1,0[$, par le critère spécial des séries alternées, $\sigma'(x)$ est du signe du premier terme, qui vaut 1, soit $\sigma'(x) > 0$ (stricte décroissance du terme général en valeur absolue). Ainsi $\sigma' > 0$ sur $[-1,1[$ ce qui assure que σ est strictement croissante sur $[-1,1]$.

12. On admet que $\sigma(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. On a

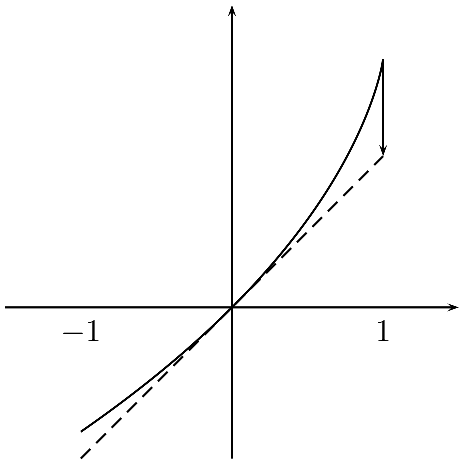
$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p-1)^2} = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2} - \left[\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{1}{2} - 1\right)\frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{12}$$

13. On applique le théorème de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$. Les fonctions f_n sont bien de classe $\mathcal{C}^2$ et on a
$$f_n''(x) = \frac{n-1}{n} x^{n-2}$$
et ainsi si $0 < a < 1$, on a $\| f_n'' \|_{\infty,[-a,a]} = \frac{n-1}{n} a^{n-2} \leqslant a^{n-2}$ et donc nous avons la convergence normale et donc uniforme de la série des dérivées secondes sur $[-a,a]$. Comme nous avons déjà établi la convergence simple de $\sum f_n$ et $\sum f_n'$ sur $]-1,1[$, on en déduit la fonction σ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$ et que l'on a
$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \sigma''(x) = S'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n} x^{n-2}$$
Ainsi $\sigma'' > 0$ sur $[0,1[$ et la fonction σ est convexe sur $[0,1]$, σ' croissante sur $[0,1[$.

Pour $x < 0$ (ce n'était pas demandé), la série ne vérifie pas le critère spécial. Il faut ruser un peu plus. On écrit
$$\sigma''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n} x^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} x^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} x^{n-2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n} x^{n-2}$$
Cette dernière série vérifie le critère spécial des séries alternées, et ainsi cette dernière somme est négative (signe du premier terme). Ainsi
$$\sigma''(x) = \frac{2-1+x}{2(1-x)} - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n} x^{n-2} = \frac{1+x}{2(1-x)} - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n} x^{n-2} > 0$$

14. On suppose que σ' admet une limite finie L en 1. Soit $N \geqslant 2$, $n-1 \geqslant 1$ et ainsi si $x \in (0,1[$,
$$\sigma'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n} x^{n-2} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{n-1}{n} x^{n-1} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n-1}}{n}$$
et en passant à la limite lorsque x tend vers 1, on obtient $L \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$; en passant à la limite lorsque N tend vers $+\infty$, on obtient une contradiction.
Ainsi σ' n'admet pas de limite finie en 1. Comme σ' est croissante, elle admet donc forcément par le théorème de la limite monotone $+\infty$ comme limite en 1.

15. On trace la courbe représentative de σ conformément aux résultats établis précédemment :



16. On sait que la série de fonctions continues $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$, et ainsi par interversion somme infinie - intégrale, on a

$$\int_0^1 \sigma(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)n^2}$$

Si $n \geqslant 1$, on a (décomposition)

$$\frac{1}{(n+1)n^2} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n^2}$$

Ainsi en sommant partiellement et en télescopant

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)n^2} = -\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = -1 + \frac{1}{N+1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$$

et en prenant la limite lorsque N tend vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^1 \sigma(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$