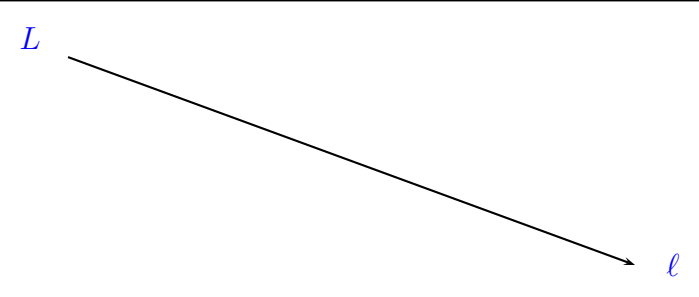


Théorème de la double limite

On revient à notre fonction de Riemann ζ définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

dont on a prouvé la stricte décroissance (directement avec la problématique du caractère strict) et la continuité par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions. On a le tableau de variation

x	1	$+\infty$
ζ		

Dans ce tableau, il nous manque les deux limites, celle en 1 et celle en $+\infty$, qui existent par le théorème de la limite monotone, mais des limites finies ou infinies. Cet exemple est intéressant car les deux limites seront étudiées par deux moyens différents.

Étude de la limite de ζ en $+\infty$

On remarque déjà que si $x > 1$,

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots \geq 1$$

Ainsi la fonction ζ est décroissante, minorée par 1, et donc d'après le théorème de la limite monotone, ζ admet une limite finie en $+\infty$ que l'on note ℓ , avec $\ell \geq 1$ ¹

On aurait «envie» de passer à la limite dans le signe somme, c'est à dire d'écrire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

ce qui serait bien pratique. Mais pour cela, il nous faudrait un théorème dit de la double limite².

Voici ce théorème, qui comporte bien sûr une hypothèse de convergence uniforme, ce qui ne doit plus vous étonner maintenant :

THÉORÈME 1. Soit $\sum(f_n)$ une série de fonctions avec a une extrémité de l'intervalle I (éventuellement infinie). On suppose que :

1) la série de fonction converge uniformément sur I (en fait au voisinage de a est suffisant, c'est une remarque qui peut être techniquement importante)

2) Pour tout entier n , la fonction f_n admet une limite finie ℓ_n .

Alors, la série $\sum \ell_n$ est convergente, et on a le résultat de la double limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

(on peut intervertir le signe somme infinie et le signe limite en a)

Pour notre fonction de Riemann :

1) nous avons vu la convergence normale donc uniforme sur par exemple $[2, +\infty[$ qui est un voisinage de $+\infty$.

2) Pour tout entier naturel n , la fonction f_n définie par $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ admet bien une

1. et on n'a pas le droit de dire que $\ell = 1$, attention, hein, je vous rappelle que si votre salaire mensuel est croissant, majoré par 10^6 , il ne va pas converger vers cette valeur

2. double car la somme infinie est une limite comme l'a bien fait remarquer Naël

limite finie en $+\infty$ avec

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut donc appliquer le théorème de la double limite, qui donne donc le fait que la série $\sum \ell_n$ converge (mais ici, ce n'est pas un scoop) et surtout que ζ admet une limite en $+\infty$ avec

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1 + 0 + 0 + \dots = 1$$

On a donc pu faire ce que l'on avait envie de faire finalement, mais attention, on a besoin de la convergence uniforme au voisinage de a et de l'existence des ℓ_n (limites finies).

Étude de la limite de ζ en 1

Nous ne pouvons pas appliquer le théorème de la double limite en 1 car nous ne disposons pas de la convergence uniforme au voisinage de 1 : la convergence normale est fautive puisque $\|f_n\|_{\infty, [1, a]} = \frac{1}{n}$, et la non convergence uniforme est fautive aussi, mais ce n'est pas facile à établir³.

(Intuitivement, la double limite nous donnerait de façon donc frauduleuse

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Frauduleux, mais on peut intuitiver que $L = +\infty$.)

On raisonne alors par l'absurde. Si on avait $L < +\infty$ (limite finie), alors on pourrait écrire si $x > 1$,

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq L$$

puis pour tout entier N non nul, la somme partielle étant inférieure à la somme complète

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq L$$

Alors nous faisons tendre x vers 1, ce qui est autorisé dans une somme finie

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq L$$

et ainsi les sommes partielles de la série harmonique seraient majorées par L , et donc la série harmonique serait convergente, ce qui est contradictoire.

On a donc $L = +\infty$ forcément.

Maintenant, on peut en fait en déduire la non convergence uniforme sur $]1, a]$ avec $a > 1$. En effet, si la convergence était uniforme, comme on a pour tout entier n non nul

$$\frac{1}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ell = \frac{1}{n}$$

on pourrait appliquer le théorème de la double limite, et on aurait que la série $\sum \ell_n$, c'est à dire la série harmonique, qui serait convergente, ce qui est absurde. Donc la

3. on va le prouver en fait, mais par la négation de l'application du théorème de la double limite

convergence n'est pas uniforme sur $]1, a]$ (donc sur aucun voisinage de 1).

Nous avons montré ici que le théorème de la double limite peut permettre de déduire une non convergence uniforme (mais il a tout de même fallu étudier L de façon élémentaire astucieuse).

Mais alors⁴, une question se pose tout de même : peut-on obtenir $\ell = 1$ directement, sans le théorème de la double limite, de façon élémentaire, mais sans doute avec des astuces de calculs et raisonnements, comme pour L ?

On donne ici une méthodologie. On n'utilise pas donc le théorème de la double limite. On écrit si $x > 1$, en mettant déjà la premier terme à part (c'est la limite supputée)

$$\zeta(x) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots +$$

et ainsi

$$0 \leq \zeta(x) - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots +$$

L'idée est de majorer, par une quantité qui tendra vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. On va faire apparaître une somme géométrique :

$$\frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} \leq \frac{2}{2^x} = \frac{1}{2^{x-1}}$$

et

$$\frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} \leq \frac{4}{4^x} = \frac{1}{4^{x-1}} = \left[\frac{1}{2^{x-1}} \right]^2$$

et de façon générale

$$\sum_{k=0}^{2^p-1} \frac{1}{(2^p + k)^x} \leq \frac{2^p}{(2^p)^x} = \left[\frac{1}{2^{x-1}} \right]^p$$

et ainsi pour les sommes partielles d'ordre $2^N - 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{2^N-1} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{p=1}^N \left[\frac{1}{2^{x-1}} \right]^p = \frac{1}{2^{x-1}} \times \frac{1 - \left[\frac{1}{2^{x-1}} \right]^N}{1 - \frac{1}{2^{x-1}}}$$

et en faisant tendre N vers $+\infty$, nous obtenons

$$0 \leq \zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{2^{x-1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{x-1}}}$$

4. c'est un bonus, en deuxième ou troisième lecture

et ainsi en passant à la limite lorsque x tend vers $+\infty$, nous avons $\zeta(x)$ qui tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

Évidemment, on préférera ici la méthode de la double limite, c'est clair ?!

La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

Montrer que l'on peut définir sur $\mathbb{R}$ la fonction f par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$$

, que f est continue, que f admet des limites finies en $\pm\infty$ que l'on précisera.