

## Quinzaine 3 du 12/10 au 06/11

### Chapitre 2 : Suites et séries de fonctions

Suite de fonctions. Convergence simple d'une suite de fonctions  $(f_n)$  vers une fonction  $f$  sur un intervalle  $I$  (ou éventuellement une réunion d'intervalles).

Exemples (\*) des suites de fonctions  $(x \mapsto x^n)$ ,  $(x \mapsto xe^{-nx})$ , de la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  définie sur  $[0, +\infty[$  par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2n - n^2x & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & x \geq \frac{2}{n} \end{cases}$$

Représentations. Problématique de la convergence simple :

- la continuité n'est pas compatible avec la convergence simple.
- l'intégration sur un segment n'est pas compatible avec la convergence simple.

Convergence uniforme d'une suite de fonctions. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Introduction de la norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et utilisation.

La suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$  si et seulement si la suite  $(\|f_n - f\|_{\infty, I})$  converge vers 0.

Si  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ , pour toute suite  $(a_n)$  d'éléments de  $I$ , la suite  $(f_n(a_n) - f(a_n))$  converge forcément vers zéro. Application à la non convergence uniforme.

Continuité de la limite d'une suite de fonctions : si  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$  et si, pour tout  $n$  (où à partir d'un certain rang),  $f_n$  est continue sur  $I$ , alors  $f$  est continue sur  $I$  (intersion limite-limite). Application à la non convergence uniforme.

Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de  $I$  ou d'autres intervalles adaptés à la situation.

Intersion limite-intégrale sur un segment (\*) : si une suite  $(f_n)$  de fonctions continues converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$  alors

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt$$

Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions (intersion limite-dérivée) :

si  $(f_n)$  est une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  qui converge simplement sur  $I$  vers  $f$  et telle que la suite  $(f'_n)$  converge uniformément sur  $I$  vers  $h$ , alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et  $f' = h$ .

Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de  $I$  ou d'autres intervalles adaptés à la situation.

Extension aux fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ . Les étudiants peuvent appliquer directement le théorème concluant au caractère  $\mathcal{C}^k$  de la limite sous l'hypothèse de convergence simple des  $(f_n^{(j)})$  pour  $0 \leq j \leq k-1$  et de convergence uniforme de  $(f_n^{(k)})$  sur tout segment de  $I$  ou d'autres intervalles adaptés à la situation.

Remarques sur le fait que la connaissance dans les cas pratiques de la limite simple  $f$  nous exempte de l'utilisation de ces théorèmes pour la continuité et dérivabilité, mais que par contre, dans le cas des séries de fonctions, la fonction somme sera le plus souvent inconnue et que ces théorèmes dans leur version séries de fonctions seront indispensables pour l'étude des propriétés de la fonction somme.

Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions. Pour établir la convergence normale de  $\sum f_n$ , les étudiants doivent savoir utiliser une série numérique convergente  $\sum \alpha_n$  majorante, c'est à dire telle que pour tout  $n$ ,  $\|f_n\|_{\infty} \leq \alpha_n$ .

La convergence normale entraîne la convergence uniforme (\*). La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point.

Régularité de la somme d'une série de fonctions.

Continuité de la somme : si  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$  et si, pour tout  $n$ ,  $f_n$  est continue sur  $I$ , alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est continue sur  $I$ .

Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de  $I$  ou d'autres intervalles adaptés à la situation.

Théorème de la double limite : si  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$  de somme  $f$  et si pour tout  $n$ ,  $f_n$  admet un limite  $\ell_n$  en  $a$  borne de  $I$  (éventuellement infinie), alors la série  $\sum_{n \geq 0} \ell_n$  converge et on a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ .

Exemples. Exemple où on ne peut pas utiliser le théorème de la double limite.

Exemple des limites en 1 et en  $+\infty$  de  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$  (\*).

Intégration terme à terme d'une série de fonctions : soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues sur  $[a, b]$ . Si la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $[a, b]$  alors la série des intégrales est convergente et on a :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt$$

Dérivation terme à terme d'une série de fonctions : soit  $(f_n)$  est une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . Si la série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  et si la série  $\sum f'_n$  converge uniformément sur  $I$ , alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est de

classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et sa dérivée est  $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$ . Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de  $I$  ou d'autres intervalles adaptés à la situation.

Extension aux fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ . Les étudiants peuvent appliquer directement un théorème concluant au caractère  $\mathcal{C}^k$  de la somme, avec la convergence simple des séries  $\sum_{n \geq 0} f_n^{(i)}$  pour  $0 \leq i \leq k-1$  et la convergence

uniforme (ou uniforme sur tout segment de  $I$  ou d'autres intervalles adaptés à la situation).

Extension aux fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ . Les étudiants peuvent appliquer directement un théorème concluant au caractère  $\mathcal{C}^k$  de la somme, avec la convergence simple des séries  $\sum_{n \geq 0} f_n^{(i)}$  pour  $0 \leq i \leq k-1$  et la convergence

uniforme (ou uniforme sur tout segment de  $I$  ou d'autres intervalles adaptés à la situation) de  $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ .

Exemple des fonctions  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ ,  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ ,  $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ ,  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$

Utilisation du critère spécial des séries alternées pour la majoration en module d'un reste, du signe d'une somme.

### Questions de cours :

- Les énoncés des définitions, des théorèmes.
- Les démonstrations marquées par (\*).
- Les méthodes usuelles sur des exemples.

