

Devoir en temps libre °2

Exercice A

Soit $(a, b, c, d) \in (\mathbb{R}^*)^4$ fixé, on considère une série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n$ à termes strictement positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+d)}$$

1. Quelle est la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$? Conclusion ?

Et si on avait par exemple $a = b = 2, c = d = 1$?

2. Soit λ un réel, on pose pour tout entier n non nul, $w_n = \ln(n^\lambda u_n)$.

(a) Montrer que

$$w_{n+1} - w_n = \lambda \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$$

(b) Montrer que si u est un réel non nul, on a (avec un « grand O »)

$$\ln(n+u) = \ln(n) + \frac{u}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(c) En déduire que

$$w_{n+1} - w_n = \frac{\lambda + a + b - c - d}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(d) En déduire que la série $\sum (w_{n+1} - w_n)$ converge si et seulement si $\lambda = c + d - a - b$.

(e) On pose désormais $\lambda = c + d - a - b$. Montrer que la suite (w_n) est convergente.

(f) Montrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que $u_n \sim \frac{A}{n^\lambda}$.

(g) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que la série $\sum u_n$ soit convergente.

3. Étudier la nature de la série de terme général u_n avec

$$u_n = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

a) en utilisant l'étude ci-dessus

b) à l'aide de la formule de Stirling et préciser la valeur de A .

Exercice B

Soit $\alpha > 0$, on considère la série numérique

$$\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$$

On notera u_n le terme général de cette série.

1. Montrer la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ est une série alternée.

2. Déterminer un équivalent de u_n et en déduire que la suite (u_n) converge vers 0.

Toto applique le théorème de comparaison par équivalence : qu'en déduit-il ? À-t-il raison ?

3. Montrer que $\sum u_n$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.

4. Démontrer que l'on a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)$$

5. Montrer alors que si $\alpha > \frac{1}{2}$, la série numérique $\sum u_n$ est convergente.
6. On suppose que $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Montrer que

$$u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \sim -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$$

et conclure.

7. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n$ soit convergente et comparer avec le résultat de Toto.
8. La suite positive

$$(-1)^n \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$$

est-elle décroissante ?

Fin



Exercice A

1. Nous avons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+d)} \sim \frac{n^2}{n^2} \sim 1$$

et ainsi la limite est 1. Le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure quoi que ce soit.

Par contre, si $a = b = 2$ et $c = d = 1$, on constate que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ et ainsi on peut en déduire que la limite est en fait 1^+ , et nous sommes dans un cas où l'on peut tout de même conclure que la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente (et même directement ici, sans le critère, la suite (u_n) est croissante, strictement positive, donc ne tend pas vers 0 d'où la divergence grossière).

2. (a) On a

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \ln((n+1)^\lambda u_{n+1}) - \ln(n^\lambda u_n) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^\lambda + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \lambda \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \end{aligned}$$

- (b) Soit
- u
- est un réel non nul, on a (avec un « grand O »), sachant que
- $\ln(1+x) = x + O_0(x^2)$
- ,

$$\begin{aligned} \ln(n+u) &= \ln\left(n\left(1 + \frac{u}{n}\right)\right) \\ &= \ln n + \ln\left(1 + \frac{u}{n}\right) \\ &= \ln(n) + \frac{u}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

- (c) Ainsi,

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \lambda \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \lambda \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln(n+a) + \ln(n+b) - \ln(n+c) - \ln(n+d) \\ &= \frac{\lambda + a + b - c - d}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

- (d) Si
- $\lambda = c + d - a - b$
- , nous avons
- $w_{n+1} - w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
- , ce qui assure la convergence absolue, donc la convergence de la série
- $\sum w_{n+1} - w_n$
- .

Si $\lambda \neq c + d - a - b$, alors

$$w_{n+1} - w_n \sim \frac{\lambda + a + b - c - d}{n}$$

et par équivalence à un terme général de signe constant, on en déduit la divergence de la série $\sum w_{n+1} - w_n$.

Donc la série $\sum w_{n+1} - w_n$ est convergente si et seulement si $\lambda = c + d - a - b$.

- (e) On pose désormais
- $\lambda = c + d - a - b$
- . On a par télescopage

$$S_N = \sum_{n=0}^N w_{n+1} - w_n = w_{N+1} - w_0$$

et comme la série $\sum w_{n+1} - w_n$ est convergente, on en déduit que (S_N) admet une limite, et donc (w_{N+1}) aussi et donc (w_N) aussi. On note L cette limite.

- (f) Ainsi on a

$$\ln(n^\lambda u_n) \longrightarrow L \quad n^\lambda u_n \longrightarrow e^L = A > 0$$

et ainsi $u_n \sim \frac{A}{n^\lambda}$.

(g) Par comparaison (termes positifs), la série $\sum u_n$ est donc convergente si et seulement si $\lambda > 1$ c'est à dire si et seulement si $c + d > a + b + 1$.

3. a) Nous avons ici

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!2^{2n}n!}{2^{2n+2}(2n)!(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)(n+1)} = \frac{(n+1)(n+1/2)}{(n+1)(n+1)}$$

et ainsi ici, on a $c + d - a - b = 1 + 1 - 1 - 1/2 = 1/2$ d'où la divergence de la série $\sum u_n$.

b) Avec la formule de Stirling, nous avons

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\ &\sim \frac{1}{2^{2n}} \frac{\sqrt{4\pi n} e^{-2n} (2n)^{2n}}{2\pi n e^{-2n} n^{2n}} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

d'où la divergence de la série $\sum u_n$, mais aussi on retrouve $\lambda = \frac{1}{2}$ et on dispose de la valeur exacte de A qui est $A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Exercice B

Soit $\alpha > 0$, on considère la série numérique

$$\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$$

On notera u_n le terme général de cette série.

1. On sait que $\ln(1+x)$ est du signe de x . Ainsi

$$\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$$

est du signe de $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$. Donc la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ est une série alternée.

2. On sait que $\ln(1+x) \sim_0 x$ et donc puisque $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ tend vers 0 si n tend vers $+\infty$, on a

$$\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) \sim \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

Toto applique le théorème de comparaison par équivalence : il obtient que la série est de même nature que la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

qui est convergente par application du critère spécial des séries alternées sachant que cette nouvelle série est bien alternée et que son terme général pris en valeur absolue $\frac{1}{n^\alpha}$ tend vers 0 en décroissant. Il en déduit alors que la série

$$\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$$

converge toujours si $\alpha > 0$.

Toto a raison...ner de travers, l'équivalence du terme général n'étant pas applicable en général lorsque les termes des séries ne sont pas de signe constant (à partir d'aucun rang).

3. On a

$$|u_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

et ainsi $\sum u_n$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.

4. Pour préciser la nature de notre série initiale, on effectue un développement asymptotique : on a puisque

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right) \end{aligned}$$

5. Si $\alpha > \frac{1}{2}$, on a en fait

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

Or les deux séries numériques $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ sont convergentes, la première par application du critère spécial et la seconde comme série de Riemann convergent et ainsi dans ce cas, la série numérique $\sum u_n$ est convergente.

6. On suppose que $\alpha \leq \frac{1}{2}$. On a alors

$$u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \sim -\frac{1}{2n^{2\alpha}} < 0$$

Et ici, par comparaison à une série de Riemann divergente, à termes de signe constant, on obtient que la série

$$\sum \left(u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

est divergente, et ainsi comme la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

est convergente, la série $\sum u_n$ diverge forcément.

7. On en déduit que la série est convergente si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$. Hum, que dire de Toto ...

8. Elle ne peut donc pas être décroissante, et à partir d'aucun rang, car sinon on pourrait appliquer le critère spécial des séries alternées et on aurait la série

$$\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

convergente, ce qui n'est pas le cas ($\alpha = 1/2$).

C'est donc inutile, mais on peut regarder dans le détail. On pose $a_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$. On regarde le passage indice pair à indice impair :

$$\begin{aligned} a_{2n+1} \leq a_{2n} &\iff -\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \\ &\iff \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2n}} \\ &\iff \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+1} - 1} \leq \frac{\sqrt{2n} + 1}{\sqrt{2n}} \\ &\iff \sqrt{2n+1}\sqrt{2n} \leq (\sqrt{2n} + 1)(\sqrt{2n+1} - 1) \\ &\iff 0 \leq \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n} - 1 \\ &\iff 1 \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}} \end{aligned}$$

ce qui est faux dès que $n \geq 1$. La suite (a_n) «remonte» une fois sur deux.

On peut aussi étudier le passage indice impair à indice pair :

$$\begin{aligned}
 a_{2n+2} \leq a_{2n+1} &\iff \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \right) \leq -\ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right) \\
 &\iff 1 + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}} \\
 &\iff \frac{\sqrt{2n+2} + 1}{\sqrt{2n+2}} \leq \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+1} - 1} \\
 &\iff (\sqrt{2n+2} + 1)(\sqrt{2n+1} - 1) \leq \sqrt{2n+2}\sqrt{2n+1} \\
 &\iff \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n+2} - 1 \leq 0 \\
 &\iff \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n+2}} \leq 1
 \end{aligned}$$

ce qui toujours vrai.

On peut tracer la suite :

